ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 61

Л. А. ПЕТРОСЯН, Б. Б. РИХСИЕВ

ПРЕСЛЕДОВАНИЕ НА ПЛОСКОСТИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1991

ББК 22.18
П31
УДК 519.7

Рецензент
доктор физико-математических наук *М. С. Никольский*

Петросян Л. А., Рихсиев Б. Б.

П31 Преследование на плоскости.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.— 96 с.— (Попул. лекции по мат.; Вып. 61).

ISBN 5-02-014154-2.

Содержит популярное изложение элементов теории дифференциальных игр и некоторых геометрических способов решения игр преследования на плоскости, базирующихся на использовании стратегии параллельного сближения (П-стратегия). Для конкретных задач преследования приведены и обоснованы оптимальные способы поведения преследующего и убегающего игроков.

Для широкого круга читателей, включая школьников старших классов, интересующихся математикой.

П $\frac{1402010000-072}{053(02)-91}$ 41-90 ББК 22.18

ISBN 5-02-014154-2

©«Наука», Физматлит, 1991

Ты уж и прежде, я помню, бежал
пред моим Пелиасом
Или забыл, как тебя одного изловив
я у стада,
Гнал по Идейским горам и с какой
от меня быстротою
Ты убегал? И назад оглянуться не смел
ты, бегущий!
С гор убежал ты и в стены Лирнесса
укрылся; но в прах я
Град сей рассыпал, ударив с Афиной
и Зевсом Кронидом.

Гомер. Илиада,
Песнь двадцатая, строки 187—192

ВВЕДЕНИЕ

Лиса P гонится за кроликом E*). Естественно, лиса стремится поймать кролика за кратчайшее время, а кролик стремится избежать поимки. Если лиса и кролик имеют возможность изменять направление своего движения как угодно, то очевидно, что кролик будет убегать по прямой от лисы, а лиса будет направлять свое движение на кролика. В результате лиса и кролик будут перемещаться вдоль прямой, соединяющей их начальные положения (рис. 1). Однако даже в случае, когда P и E

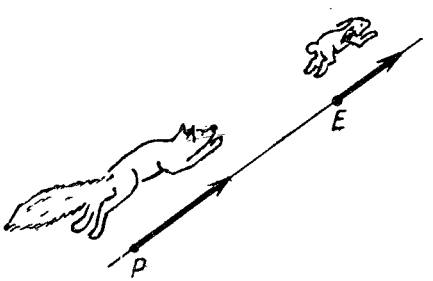


Рис. 1

будем считать точками, для математического обоснования этого, на первый взгляд тривиального, результата оказывается необходимым доказать ряд вспомогательных

*) Первые буквы английских слов соответственно *pursuer* — преследователь, *evader* — убегающий.

теорем из элементарной планиметрии. Задача усложняется, если точки P и E могут перемещаться лишь внутри некоторого выпуклого множества на плоскости, т. е. когда лиса преследует кролика на огражденном участке, или если в преследовании участвует несколько точек (лис) $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Здесь возникают новые математические задачи, многие из которых не решены и в настоящее время.

В предлагаемой книге в доступной форме излагаются различные задачи преследования, в которых участвуют объекты, совершающие простое движение на плоскости. Простым движением называется движение с постоянной по величине скоростью, при этом направление движения может изменяться произвольным образом. Определение наилучших способов преследования и убегания, выяснение самой возможности встречи — вот основные вопросы, которые возникают при изучении конфликтных задач преследования по существу.

Задачи преследования являются типичными примерами дифференциальных игр. Теория дифференциальных игр — сложная и разветвленная дисциплина, изучение которой требует глубокого знания многих специальных разделов математики. Фундаментальный вклад в развитие этой теории внесли советские математики Л. С. Понтрягин и Н. Н. Красовский.

Для исследования задач преследования с простым движением требуется гораздо меньший запас знаний, поэтому возникла идея изложения основных результатов на языке, доступном для учащихся старших классов.

Задачи преследования с простым движением изобилуют интересными результатами, которые стали путеводной нитью в построении современного обширного здания теории дифференциальных игр. Для их получения широко используются геометрические конструкции и методы. Несмотря на внешнюю простоту постановки, многие задачи преследования с простым движением на сегодня являются серьезными математическими проблемами.

Книга рассчитана на школьников старших классов, интересующихся математикой. Она не предполагает никаких предварительных знаний, однако желательно знакомство с методом координат, понятиями вектора, геометрического места точек и др. В то же время нетрадиционность предлагаемого материала может потребовать немалого времени и терпения для глубокого усвоения.

В конце каждого параграфа приводятся упражнения, решение которых поможет более глубокому пониманию основных результатов.

В конце книги приведены нерешенные задачи для исследования. Авторы считают, что для нахождения их решения школьнику вполне достаточно внимательно изучить предлагаемую книгу, хотя, конечно, наличие математических способностей было бы также желательным.

Авторы выражают благодарность Ю. С. Осипову за поддержку, В. И. Благодатских и Н. Ю. Сатимову за внимание к работе.

ГЛАВА I
ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Простое движение. Постановка задачи преследования

В настоящем параграфе мы дадим определение простого движения точки на плоскости, обратив особое внимание на движение по ломаным с конечным числом вершин, которое будет использовано нами в дальнейшем; опишем две основные игры преследования на плоскости.

1.1. Простое движение. Пусть точка P начинает движение на плоскости из начального состояния (положения) x_0. Если отмечать ее текущие положения, то мы получим на плоскости некоторую непрерывную кривую, которая называется *траекторией движения*. Будем производить отсчет пройденного пути вдоль траектории от начальной точки x_0. Во всяком движении длина пути s, пройденного точкой P, зависит от времени. Это обстоятельство позволяет записать s как функцию времени: $s = s(t)$ (рис. 2). Если известен способ перемещения точки P по этой траектории, то можно установить формулу, определяющую *положения точки на траектории* в любой момент времени, т. е. *закон движения точки*.

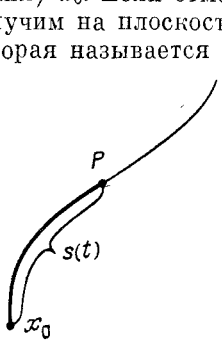


Рис. 2

Траектория движения точки P на плоскости может представлять собой как прямую, так и кривую линию. Соответственно этому движения разделяются на *прямолинейные и криволинейные*.

Простым движением называется такое движение, при котором расстояние, пройденное точкой P из начального состояния x_0, является линейной функцией времени:

$$s(t) = \rho t,$$

здесь t — время, в течение которого происходило движение, $s(t)$ — путь, пройденный точкой P из начального состояния x_0 за время t, а величина ρ, представляющая собой путь, проходимый точкой P в единицу времени, называется *линейной скоростью точки*. При простом движении величина ρ является постоянной и не зависит от времени.

Таким образом, простое движение точки P из начального местоположения x_0 на плоскости есть движение по любой криволинейной траектории, исходящей из этой точки, с постоянной линейной скоростью ρ. На рис. 3 изображены различные примеры простых движений из точки x_0.

Простое движение точки P может рассматриваться в выпуклом множестве S на плоскости, т. е. в процессе движения точка P не покидает множество S. Напомним,

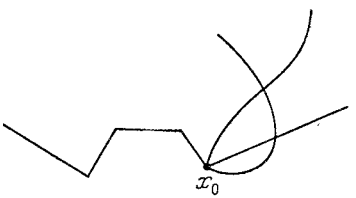


Рис. 3

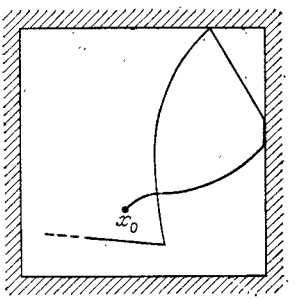


Рис. 4

что множество называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий две любые его точки, целиком содержится в этом множестве. На рис. 4 приведен пример простого движения точки P в квадрате.

1.2. Простое движение по ломаным. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать лишь подкласс простых движений, а именно всевозможные *движения по ломаным с конечным числом вершин*. Это означает, что мы будем предполагать в дальнейшем, что точка P, двигаясь с постоянной линейной скоростью ρ из начального положения x_0, может изменять направление своего движения лишь конечное число раз. Отметим, что любое простое движение может с достаточной степенью точности быть аппроксимировано (приближено) простым движением по ломаным с конечным числом вершин.

Изучим *закон движения* точки P по ломаным с конечным числом вершин. Предположим, что на плоскости введена ортогональная система координат xOy и в момент времени $t=0$ точка P находится в положении $x_0=(x_{01}, x_{02})$ (рис. 5, *а*). Пусть точка P в момент времени

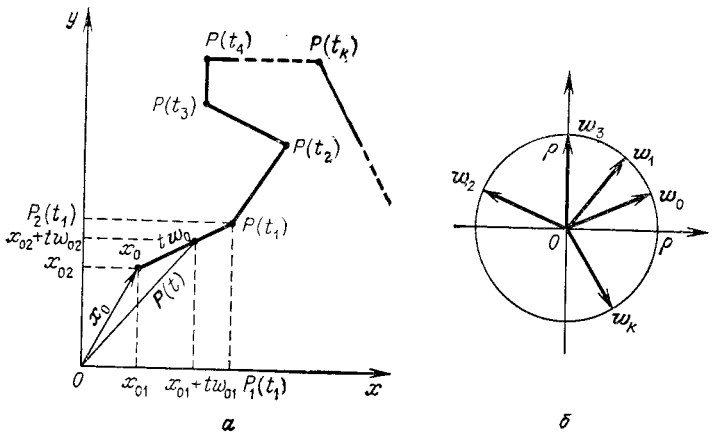


Рис. 5

$t=0$ начинает движение в некотором фиксированном направлении с постоянной линейной скоростью ρ. Это равносильно тому, что точка P, начиная с момента времени $t=0$, движется с некоторой постоянной вектор-скоростью $\mathbf{w}_0=(w_{01}, w_{02})$, $w_{01}^2+w_{02}^2=\rho^2$ (рис. 5, *б*).

Точка P, двигаясь с вектор-скоростью $\mathbf{w}_0$ в промежутке времени $[0, t]$, пройдет путь, длина которого равна

$$s=\rho t=\sqrt{w_{01}^2+w_{02}^2}\cdot t=|\mathbf{w}_0|\,t=|t\mathbf{w}_0|,$$

где $|\mathbf{w}_0|$ — длина вектора $\mathbf{w}_0$. Если символом $P(t)=(P_1(t), P_2(t))$ обозначим положение точки P в момент $t\geqslant 0$, $P(0)=x_0$, то будем иметь (рис. 5, *а*)

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{x}_0+t\mathbf{w}_0$$

или в координатах

$$P(t)=(P_1(t),\ P_2(t))=(x_{01}+tw_{01},\ x_{02}+tw_{02}). \qquad (1)$$

Таким образом, при движении точки P с вектор-скоростью $\mathbf{w}_0$ закон ее движения описывается уравнением (1).

Пусть в момент времени $t = t_1$ точка P изменяет направление своего движения и начинает перемещаться с постоянной вектор-скоростью $\mathbf{w}_1 = (w_{11}, w_{12})$, $w_{11}^2 + w_{12}^2 = \rho^2$ (рис. 5, *б*). Точка P, продолжая движение с вектор-скоростью $\mathbf{w}_1$ из начального положения $P(t_1)$, в промежутке времени $[t_1, t]$, $t \geqslant t_1$, пройдет путь, длина которого равна $s = (t - t_1)\rho = |(t - t_1)\mathbf{w}_1|$. Тогда при $t \geqslant t_1$ имеем

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t_1) + (t - t_1)\mathbf{w}_1$$

или в координатах

$$P(t) = (P_1(t),\ P_2(t)) = \\ = (P_1(t_1) + (t - t_1)w_{11},\ P_2(t_1) + (t - t_1)w_{12}). \quad (2)$$

Если в формуле (2) учесть, что $P(t_1) = (x_{01} + t_1 w_{01},\ x_{02} + t_1 w_{02})$ (см. (1)), то для точки $P(t)$ при $t \geqslant t_1$ получаем

$$P(t) = (P_1(t),\ P_2(t)) = \\ = (x_{01} + t_1 w_{01} + (t - t_1)w_{11},\ x_{02} + t_1 w_{02} + (t - t_1)w_{12}). \quad (3)$$

Таким образом, закон движения точки P на промежутке времени $[0, t_1]$ (t_1 — момент изменения направления движения точки P) описывается уравнением (1), а при $t \geqslant t_1$, когда P двигается с вектор-скоростью $\mathbf{w}_1$,— уравнением (3). Последующие изменения направлений движения точки P приводят нас к аналогичным формулам. Однако по предположению точка P может изменять направление движения лишь конечное число раз, поэтому, начиная с некоторого момента времени $t = t_k$, где k — некоторое натуральное число, точка P при всех $t \geqslant t_k$ будет перемещаться с некоторой постоянной вектор-скоростью

$$\mathbf{w}_k = (w_{k1}, w_{k2}), \qquad w_{k1}^2 + w_{k2}^2 = \rho^2.$$

Аналогично формулам (1), (3) можем получить

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t_k) + (t - t_k)\mathbf{w}_k, \qquad t \geqslant t_k,$$

или в координатах

$$P(t) = (P_1(t),\ P_2(t)) = \\ = (P_1(t_k) + (t - t_k)w_{k1},\ P_2(t_k) + (t - t_k)w_{k2}) = \\ = (x_{01} + t_1 w_{01} + (t_2 - t_1)w_{11} + \ldots + (t_k - t_{k-1})w_{k-1\,1} + \\ + (t - t_k)w_{k1},\ x_{02} + t_1 w_{02} + (t_2 - t_1)w_{12} + \ldots \\ \ldots + (t_k - t_{k-1})w_{k-1\,2} + (t - t_k)w_{k2}), \quad (4)$$

$\mathbf{w}_0 = (w_{01}, w_{02})$, $\mathbf{w}_1 = (w_{11}, w_{12})$, ..., $\mathbf{w}_{k-1} = (w_{k-1\,1}, w_{k-1\,2})$,

$\mathbf{w}_i = (w_{i1}, w_{i2})$ — постоянные вектор-скорости, выбранные точкой P в моменты времени $0, t_1, t_2, \ldots, t_k$ соответственно. Мы определили закон движения точки P вдоль ломаной с началом в точке $P(0)$ и с вершинами в точках $P(t_1)$, $P(t_2)$, ..., $P(t_k)$. Таким образом, закон движения точки P по этой ломаной на отрезке времени $[0, t_1]$ описывается уравнением (1), где $\mathbf{w}_0 = (w_{01}, w_{02})$, $w_{01}^2 + w_{02}^2 = \rho^2$ — вектор-скорость, выбранная точкой P в момент времени $t = 0$; на отрезке времени $[t_1, t_2]$ — уравнением (3), где $\mathbf{w}_1 = (w_{11}, w_{12})$, $w_{11}^2 + w_{12}^2 = \rho^2$ — вектор-скорость, выбранная точкой P в момент времени $t = t_1$, и т. д.; начиная с некоторого времени $t = t_k$ — уравнением (4), где $\mathbf{w}_k = (w_{k1}, w_{k2})$, $w_{k1}^2 + w_{k2}^2 = \rho^2$ — вектор-скорость, выбранная точкой P в момент времени $t = t_k$.

Отметим, что движение точки P по ломаным с конечным числом вершин можно также рассматривать на любом конечном отрезке времени $[0, \theta]$.

1.3. Игра преследования с простым движением. Пусть на плоскости задано выпуклое множество S. Точки P_1, P_2, ..., P_m и E перемещаются в S, обладая простым движением с постоянными линейными скоростями $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ и σ соответственно *). Используя терминологию теории игр, совокупность точек $P_1, P_2, \ldots, P_m$ назовем *преследующим игроком* или *нарядом преследователей* P, а E — *убегающим игроком*. Движение наряда P и игрока E начинается в момент $t = 0$ из начальных положений $P_1(0), P_2(0), \ldots, P_m(0), E(0)$. Положения игроков $P_1, P_2, \ldots, P_m, E$ в момент $t \geqslant 0$ обозначим соответственно $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_m(t)$ и $E(t)$.

Мы будем говорить, что наряд P *осуществил встречу* с E, если хотя бы один из преследователей P_i наряда P осуществил встречу с E, т. е. когда впервые положение E совпадает с положением хотя бы одного преследователя P_i из наряда P. *Преследование* нарядом P убегающего E начинается в момент времени $t = 0$ и завершается, когда наряд P осуществляет встречу с E. *Потребуем*, чтобы в процессе движения все преследователи из наряда P и убегающей E *не покидали* множества S. *Целью наряда* P является встреча с убегающим E за минимальное время, а *цель убегающего* E — оттянуть момент встречи или избежать ее, если это возможно.

*) Как было отмечено в п. 1.2, здесь и всюду в дальнейшем рассматриваются только простые движения по ломаным с конечным числом вершин.

В каждый момент времени $t \geqslant 0$ игроку E известно свое положение и положение всех преследователей в этот же момент времени. Каждый преследователь P_i из наряда P в момент времени $t \geqslant 0$ знает положения всех членов наряда, включая себя, положение игрока E, а также направление движения игрока E в этот момент времени t, однако ему неизвестны будущие маневры E, т. е. P_i не знает, когда и как будет изменять игрок E направление своего движения в будущем.

Такую задачу преследования будем называть *игрой преследования с простым движением* и обозначать $\Gamma(m, 1; S)$, подчеркивая при этом зависимость от числа преследователей и вида множества S. В случае, когда S совпадает с плоскостью, такую игру обозначим $\Gamma(m, 1)$. При необходимости также будем использовать запись $\Gamma(P_1, P_2, \ldots, P_m, E; S)$ или $\Gamma(P_1, P_2, \ldots, P_m, E)$.

Конечное число θ назовем *оптимальным временем преследования в игре* $\Gamma(m, 1; S)$ относительно начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$, если выполнены следующие условия:

а) для любых движений игрока E существует способ поведения наряда P, гарантирующий ему встречу с E не позже, чем за время θ;

б) существует такой способ поведения игрока E, что наряд P не может осуществить встречу с E до момента θ.

Если для конечного числа θ выполнено только условие а), то число θ назовем *гарантированным временем преследования* относительно начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$, а если для конечного числа θ выполнено только условие б), то число θ назовем *гарантированным временем избежания* встречи относительно начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$.

Пусть θ — оптимальное время преследования относительно положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$. Тогда любой способ поведения убегающего E, при котором наряд P не может осуществить с ним встречу до момента θ (условие б)), назовем *оптимальной стратегией игрока* E. Способ поведения наряда P, при котором гарантируется встреча с E за время не позже, чем за время θ (условие а)), назовем *оптимальной стратегией наряда* P.

Под *решением игры* $\Gamma(m, 1; S)$ мы будем понимать нахождение оптимальной стратегии наряда P, оптимальной стратегии игрока E и оптимального времени преследования.

Мы будем говорить, что в игре $\Gamma(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ *возможно убегание*, если существует такой способ поведения убегающего E, что наряд P не может осуществить с ним встречу на любом конечном отрезке времени $[0, \theta]$. Это означает, что если перед началом игры E поставил перед собой задачу избежать встречи с нарядом P в течение любого конечного, но фиксированного заранее времени θ, то у него существует способ поведения, гарантирующий выполнение этой задачи при любых действиях наряда P.

1.4. Игра с «линией жизни». Пусть на плоскости задано выпуклое множество S, не совпадающее с плоскостью. Границу S обозначим буквой L и назовем *линией жизни*. Точки P_1, P_2, ..., P_m и E, т. е. наряд преследователей P и убегающий E, перемещаются в S, обладая простым движением с постоянными линейными скоростями ρ_1, ρ_2, ..., ρ_m и σ соответственно. Так же, как и в игре $\Gamma(m, 1; S)$, движение наряда P и убегающего E начинается в момент $t = 0$ из положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$; предполагается, что игроки P и E в каждый момент времени $t \geqslant 0$ обладают той же информацией, что и в игре $\Gamma(m, 1; S)$. Цель наряда P — не допустить достижения границы — линии жизни L — игроком E до встречи с нарядом P. Цель убегающего E — достижение линии жизни L, при этом избегая встречи с P до момента достижения L. Такую задачу преследования с простым движением назовем *игрой с линией жизни* и будем обозначать $G(m, 1; S)$. Если для начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ существует способ поведения наряда P, гарантирующий достижение его цели при любых движениях E, то способ поведения назовем *оптимальной стратегией наряда* P и будем говорить, что в игре $G(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ *выживание невозможно*. Это означает, что если в игре $G(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ выживание невозможно, то оптимальная стратегия наряда P гарантирует встречу с убегающим E до достижения им линии жизни L.

Если для начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ существует способ поведения убегающего E, гарантирующий достижение его цели, то этот способ назовем *оптимальной стратегией* E и будем говорить, что в игре $G(m, 1; S)$ из начальных положений

$P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ *возможно выживание*. Это означает, что если в игре $G(m, 1; S)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ выживание возможно, то оптимальная стратегия E гарантирует ему достижение линии жизни L до встречи с P.

Упражнения

1. Пусть $P(0)=(0, 0)$ и $E(0)=(0, 1)$, а игроки P и E, начиная с момента времени $t=0$, перемещаются с постоянными вектор-скоростями $u=(2, 0)$, $v=(1, 0)$ соответственно. Найдите

а) закон движения точек P и E, т. е. формулу для положений $P(t)$ и $E(t)$ в каждый момент времени $t \geqslant 0$;

б) точку и момент встречи P с E.

2. Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; S)$, где $\rho=2$, $\sigma=1$ и

$$S=\{(x, y): y=0\},$$

т. е. игроки P и E перемещаются в процессе игры лишь на оси абсцисс.

а) Докажите, что оптимальное время преследования в игре $\Gamma(1, 1; S)$ относительно начальных положений $P(0)=(0, 0)$ и $E(0)=(1, 0)$ равно $\theta=1$. Оптимальная стратегия для P — перемещение с вектор-скоростью $\mathbf{u}=(2, 0)$, для E — перемещение с вектор-скоростью $\mathbf{v}=(1, 0)$.

б) Найдите решение игры $\Gamma(1, 1; S)$ относительно начальных положений $P(0)=(a, 0)$ и $E(0)=(b, 0)$, $a \neq b$.

3. Рассмотрим игру $G(1, 1; S)$, где $\rho=2$, $\sigma=1$ и

$$S=\{(x, y): -2 \leqslant x \leqslant 2, y=0\}$$

с линией жизни $L=\{(-2, 0), (2, 0)\}$, состоящей из двух точек.

а) Если $P(0)=(0, 0)$, то укажите множество всех начальных положений $E(0)$, из которых в игре $\Gamma(1, 1; S)$ возможно выживание.

б) Рассмотрим игру $G(1, 1; S)$ относительно начальных положений $P(0)=(a, 0)$, $-2 \leqslant a \leqslant 2$, и $E(0)=(b, 0)$, $-2 \leqslant b \leqslant 2$. Определите, при каких значениях параметров a, b возможно выживание.

§ 2. Множество достижимости, окружность и точка Аполлония

В этом параграфе будем предполагать, что S совпадает с плоскостью и наряд P состоит из одного преследователя P.

2.1. Множество достижимости. Пусть преследователь P перемещается на плоскости в соответствии с простым движением с постоянной линейной скоростью $\rho > 0$.

Множество всех точек $z = (x, y)$ на плоскости, в которых может оказаться игрок P в момент времени t, используя всевозможные движения по ломаным с конечным числом вершин, начиная движение в момент $t = 0$ из точки $P(0)$, назовем *множеством достижимости игрока P к моменту t*. Обозначим $H(A; R)$ ($S(A; R)$) круг (окружность) с центром в точке A и радиусом R (см. список обозначений).

Справедлива следующая

Лемма 1. *Множество достижимости игрока P к моменту $t \geqslant 0$ образует круг с центром в точке $P(0)$ и с радиусом ρt.*

Доказательство. а) Пусть $z \in S(P(0); \rho t)$, т. е. z лежит на границе круга $H(P(0); \rho t)$ (рис. 6, *а*). Тогда P может оказаться в точке z, двигаясь по полупрямой

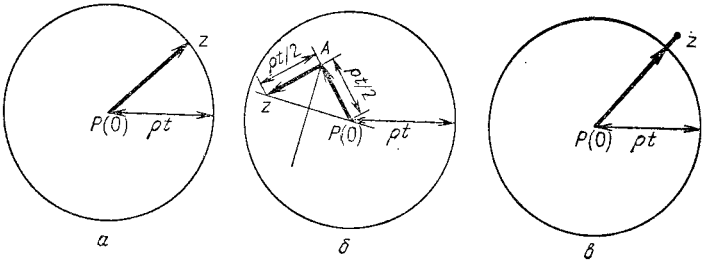


Рис. 6

$\overrightarrow{[P(0), z)}$ (см. список обозначений), поскольку по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), z)}$ можно двигаться только в направлении $\overrightarrow{P(0)z}$, и длина пути, пройденного за время t с постоянной линейной скоростью ρ, равна $s(t) = \rho t = |P(0)z|$.

б) Пусть $z \in H(P(0); \rho t) \setminus S(P(0); \rho t)$, т. е. z — внутренняя точка круга $H(P(0); \rho t)$. В этом случае существует достаточно много ломаных с конечным числом вершин, двигаясь по которым, P может оказаться в точке z

в момент времени t. Ограничимся лишь указанием одновершинной ломаной. Для этого проведем серединный перпендикуляр к отрезку $[P(0), z]$ (рис. 6, *б*) и на нем отметим такую точку A, что $|P(0)A| = \rho t/2$. Очевидно, что $A \in H(P(0); \rho t)$. Игрок P может попасть в точку z в момент t, перемещаясь до момента времени $t/2$ по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), A)}$, затем в течение такого же времени — по полупрямой $\overrightarrow{[A, z)}$.

в) Пусть $z \notin H(P(0); \rho t)$, т. е. точка z лежит вне круга $H(P(0); \rho t)$ (рис. 6, *в*). Так как игрок P за время t может пройти лишь путь, длина которого равна ρt, и $\rho t < |P(0)z|$, то очевидно, что P не может оказаться в точке z в момент времени t. Лемма доказана.

2.2. Окружность и точка Аполлония. Пусть преследователь P и убегающий E перемещаются на плоскости в соответствии с простым движением с постоянными линейными скоростями ρ и σ, $\rho > \sigma > 0$, и в начале игры

$$|P(0)E(0)| = b > 0.$$

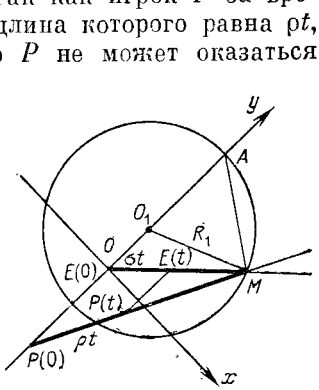


Рис. 7

Предположим, что игрок E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{[E(0), B)}$ (рис. 7). Пусть игрок P, зная это направление движения игрока E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{[P(0), C)}$, обеспечивая встречу с E в точке M. Тогда должно выполняться равенство

$$\frac{|E(0)M|}{\sigma} = \frac{|P(0)M|}{\rho}, \text{ или } \rho|E(0)M| = \sigma|P(0)M|. \qquad (5)$$

Для различных полупрямых $\overrightarrow{[E(0), B)}$ получаем различные точки встречи M, удовлетворяющие (5).

Лемма 2. *Геометрическое место точек $M = (x, y)$, удовлетворяющих уравнению* (5), *является окружностью.*

Доказательство. На плоскости выберем систему координат xOy таким образом, чтобы $E(0) = (0, 0)$,

$P=(0, -b)$. Тогда

$$|E(0)M| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad |P(0)M| = \sqrt{x^2+(y+b)^2};$$

подставляя в (5), получаем

$$\rho\sqrt{x^2+y^2} = \sigma\sqrt{x^2+(y+b)^2}. \tag{6}$$

Возведя в квадрат обе стороны уравнения (6), получим

$$\rho^2(x^2+y^2) = \sigma^2[x^2+(y+b)^2],$$

$$(\rho^2-\sigma^2)x^2+(\rho^2-\sigma^2)y^2-2b\sigma^2y = b^2\sigma^2,$$

$$x^2+y^2-2\cdot\frac{b\sigma^2}{\rho^2-\sigma^2}\cdot y+\frac{b^2\sigma^4}{(\rho^2-\sigma^2)^2} = \frac{b^2\sigma^2}{\rho^2-\sigma^2}+\frac{b^2\sigma^4}{(\rho^2-\sigma^2)^2},$$

$$x^2+\left(y-\frac{b\sigma^2}{\rho^2-\sigma^2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma\rho b}{\rho^2-\sigma^2}\right)^2. \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что геометрическое место точек $M=(x, y)$, удовлетворяющих уравнению (1), является окружностью $S(O_1; R_1)$, где

$$O_1 \in [P(0), E(0)], \tag{8}$$

$$|E(0)O_1| = \frac{\sigma^2|P(0)E(0)|}{\rho^2-\sigma^2} = \frac{\sigma^2 b}{\rho^2-\sigma^2}, \tag{9}$$

$$P(0)O_1| = |P(0)E(0)|+|E(0)O_1| = \frac{\rho^2|P(0)E(0)|}{\rho^2-\sigma^2} = \frac{\rho^2 b}{\rho^2-\sigma^2},$$

(10)

$$R_1 = \frac{\rho\sigma|P(0)E(0)|}{\rho^2-\sigma^2} = \frac{\rho\sigma b}{\rho^2-\sigma^2}. \tag{11}$$

Лемма доказана.

Окружность $S(O_1; R_1)$ была известна математикам древнего мира и называется *окружностью Аполлония*, соответствующей положениям $P(0)$ и $E(0)$. Наиболее удаленную от $E(0)$ точку M на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$ назовем *точкой Аполлония* и обозначим $A(P(0), E(0))$. Круг $H(O_1; R_1)$ назовем *кругом Аполлония*.

Лемма 3. $A(P(0), E(0)) = S(O_1; R_1) \cap [P(0), E(0))$.

Доказательство. Пусть M — точка на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$, отличная от точки $A = S(O_1; R_1) \cap [P(0), E(0))$ (рис. 7). Треугольник O_1MA равнобедренный, так как $|O_1M| = |O_1A| = R_1$. Отсюда для треугольника $E(0)MA$ имеем

$$\angle E(0)AM < \angle E(0)MA,$$

следовательно,

$$|E(0)M| < |E(0)A|,$$

т. е. A — точка на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$, наиболее удаленная от E_0. Лемма доказана.

Из формул (9) и (11) следует, что

$$|E(0)A| = |E(0)O_1| + R_1 = \frac{\sigma |P(0)E(0)|}{\rho - \sigma} = \frac{\sigma b}{\rho - \sigma}. \quad (12)$$

Приведем некоторые свойства точки и окружности Аполлония.

Лемма 4. *Пусть M — некоторая точка на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$ и игроки P и E перемещаются по полупрямым $\overrightarrow{[P(0), M)}$ и $\overrightarrow{[E(0), M)}$, соответственно. Тогда для каждого t, $0 < t < |E(0)M|/\sigma$, отрезок $[P(t), E(t)]$ параллелен отрезку $[P(0), E(0)]$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое t, $0 < t < |E(0)M|/\sigma$. Тогда для положений $P(t)$ и $E(t)$ имеем (рис. 7)

$$|E(0)E(t)| = \sigma t, \quad |P(0)P(t)| = \rho t. \quad (13)$$

Рассмотрим $\triangle P(0)ME(0)$ и $\triangle P(t)ME(t)$. Из формул (5) и (13) имеем

$$\frac{|E(0)M|}{|P(0)M|} = \frac{|E(0)E(t)|}{|P(0)P(t)|} = \frac{\sigma}{\rho},$$

откуда

$$\frac{|E(0)M| - |E(0)E(t)|}{|P(0)M| - |P(0)P(t)|} = \frac{|E(t)M|}{|P(t)M|} = \frac{\sigma}{\rho}. \quad (14)$$

Из формул (14) получим, что $\triangle P(0)ME(0) \infty \triangle P(t)ME(t)$ (так как угол $\angle P(0)ME(0)$ общий для обоих треугольников). Следовательно, отрезок $[P(0), E(0)]$ параллелен отрезку $[P(t), E(t)]$ при любом t, $0 < t < |E(0)M|/\sigma$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть M — некоторая точка на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$ и игрок E перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), M)}$. Тогда преследователь P не может осуществить встречу с E до момента времени $|E(0)M|/\sigma$, т. е. $|E(0)M|/\sigma$ — наименьшее время, за которое P может осуществить встречу с E.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое t, $0 < t < |E(0)M|/\sigma$. Игрок E в момент времени t оказывается в положении $E(t)$, $|E(0)E(t)| = \sigma t$ (рис. 8). Из леммы 1 имеем, что при любом способе перемещения игро-

ка P точка $P(t) \in H(P(0); \rho t)$. Обозначим $P' = S(P(0); \rho t)) \cap [P(0)M)$. Треугольник $P(0)P'E(t)$ тупоугольный. Действительно, отрезок $[P(0), E(0)]$ параллелен отрезку $[P(t), E(t)]$ (см. лемму 4), поэтому

$$\angle E(0)P(0)P' + \angle P(0)P'E(t) = 180°$$

и $\angle E(0)P(0)P' < 90°$. Отсюда получим, что в треугольнике $P(0)P'E(t)$

$$\rho t = |P(0)P'| < |P(0)E(t)|. \qquad (15)$$

Из (15) имеем, что $E(t) \notin H(P(0); \rho t)$, следовательно, игрок P при любом способе перемещения не может оказаться в момент времени t в точке $E(t)$.

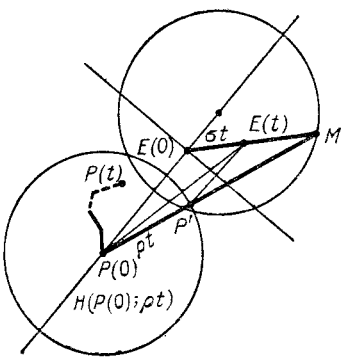


Рис. 8

Таким образом, если игрок E перемещается по $\overrightarrow{[E(0), M)}$, то игрок P не может осуществить встречу с E за время t, где $t < |E(0)M|/\sigma$.

С другой стороны, из определения окружности Аполлония следует, что если P будет перемещаться по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), M)}$, то встреча с E произойдет в момент времени $|E(0)M|/\sigma$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $S(O_1; R_1)$ — *окружность*, $A = A(P(0), E(0))$ — *точка Аполлония. Тогда*

а) *окружности* $S(O_1; R_1)$, $S\left(E(0); \frac{b\sigma}{\rho - \sigma}\right)$ *и* $S\left(P(0); \frac{b\rho}{\rho - \sigma}\right)$ *касаются в одной точке* A;

б) $H(O_1; R_1) \subset H\left(E(0); \frac{b\sigma}{\rho - \sigma}\right) \subset H\left(P(0); \frac{b\rho}{\rho - \sigma}\right)$;

в) *момент времени* $t = \frac{b}{\rho - \sigma}$ *является наименьшим моментом времени* $t \geqslant 0$, *для которого выполнено включение*

$$H(E(0); \sigma t) \subset H(P(0), \rho t). \qquad (16)$$

Доказательство. Утверждения а) и б) непосредственно следуют из определения точек O_1, A и радиуса R_1 (см. (8)—(12) и рис. 9).

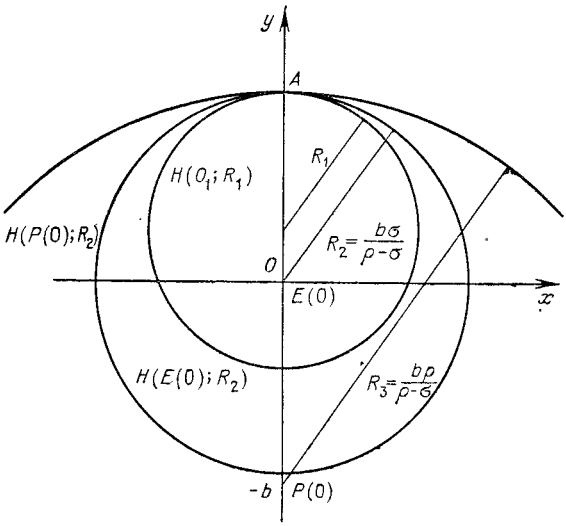

y
A
$H(O_1;R_1)$
R_1
$H(P(0);R_2)$
$R_2=\frac{b\sigma}{\rho-\sigma}$
0
E(0)
x
$H(E(0);R_2)$
$R_3=\frac{b\rho}{\rho-\sigma}$
-b
P(0)

Рис. 9

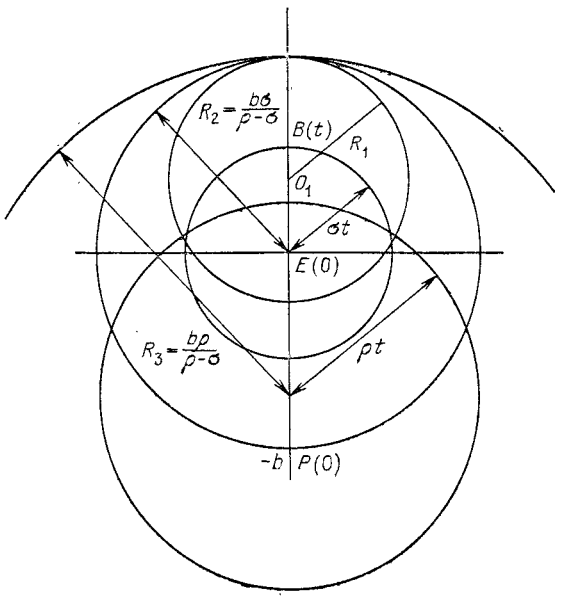

$R_2=\frac{b\sigma}{\rho-\sigma}$
B(t)
R_1
O_1
σt
E(0)
$R_3=\frac{b\rho}{\rho-\sigma}$
ρt
-b
P(0)

Рис. 10

в) Из утверждения б) следует, что при $t = b/(\rho - \sigma)$ соотношение (16) выполнено. Зафиксируем t,

$$0 \leqslant t < \frac{b}{\rho - \sigma}. \tag{17}$$

Тогда из формулы (17) имеем

$$(\rho - \sigma)t < b, \quad \rho t < b + \sigma t. \tag{18}$$

Рассмотрим точку $B(t) \in H(E(0); \sigma t)$ (рис. 10) такую, что

$$B(t) \in [E(0), O_1), \quad |E(0)B(t)| = \sigma t. \tag{19}$$

Тогда из формул (18), (19) получим

$$|P(0)B(t)| = |P(0)E(0)| + |E(0)B(t)| = b + \sigma t > \rho t.$$

Отсюда

$$B(t) \notin H(P(0); \rho t),$$

т. е. для любого момента времени t, $0 \leqslant t < \frac{b}{\rho - \sigma}$, существует точка $B(t) \in H(E(0); \sigma t)$ и $B(t) \notin H(P(0); \rho t)$, т. е. соотношение (16) не выполнено. Лемма доказана.

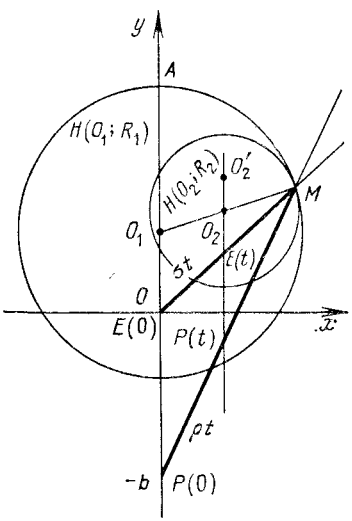


Рис. 11

Лемма 7. *Пусть M — точка на окружности Аполлония $S(O_1, R_1)$, и игроки P и E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещаются по полупрямым $\overrightarrow{[P(0), M)}$ и $\overrightarrow{[E(0), M)}$ соответственно. Тогда окружность Аполлония, соответствующая какой-либо паре промежуточных положений $P(t)$ и $E(t)$, $0 < t < |E(0)M|/\sigma$, касается окружности $S(O_1; R_1)$ в точке M.*

Доказательство. Зафиксируем t, $0 < t < |E(0), M|/\sigma$. Пусть $S(O_2'; R_2)$ — окружность Аполлония, соответствующая положениям $P(t)$ и $E(t)$. Обозначим $O_2 = (P(t), E(t)) \cap (O_1, M)$ (рис. 11). Из формул (8)—(12) имеем $O_2' \in [P(t), E(t))$,

$$|E(t)O_2'| = \frac{\sigma^2 |P(t)E(t)|}{\rho^2 - \sigma^2}, \quad |P(t)O_2'| = \frac{\rho^2 |P(t)E(t)|}{\rho^2 - \sigma^2}, \tag{20}$$

$$R_2 = \frac{\rho\sigma |P(t)E(t)|}{\rho^2 - \sigma^2}. \tag{21}$$

Учитывая, что $|P(t)E(t)| > 0$ при $0 < t < |E(0)M|/\sigma$, из формулы (20) получим

$$\frac{|E(0)O_2'|}{|P(t)E(t)|} = \frac{\sigma^2 |P(t)E(t)|}{(\rho^2 - \sigma^2)|P(t)E(t)|} = \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2}. \qquad (22)$$

Из формулы (9) и учитывая, что $|P(0)E(0)| = b$, имеем

$$\frac{|E(0)O_1|}{|P(0)E(0)|} = \frac{b\sigma^2}{(\rho^2 - \sigma^2)b} = \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2}. \qquad (23)$$

Поскольку $(P(0), E(0)) \| (P(t), E(t))$ (см. лемму 4), из формулы (23) и теоремы Фалеса следует

$$\frac{|E(0)O_1|}{|P(0)E(0)|} = \frac{|E(t)O_2|}{|P(t)E(t)|} = \frac{\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2}.$$

Отсюда и из формулы (22) получаем, что $O_2 = O_2'$, т. е. $O_2' \in [O_1, M]$. Треугольники $E(0)MO_1$ и $E(t)MO_2$ подобны, следовательно,

$$\frac{|O_2M|}{|E(t)O_2|} = \frac{|O_1M|}{|E(0)O_1|}; \qquad (24)$$

отсюда и из формул (9), (11), (20), (21) получим

$$|O_2M| = \frac{|E(t)O_2| \cdot |O_1M|}{|E(0)O_1|} = \frac{\rho\sigma |P(t)E(t)|}{\rho^2 - \sigma^2} = R_2. \qquad (25)$$

Так как $O_2 \in [O_1, M]$, из формулы (25) следует, что окружности $S(O_1; R_1)$ и $S(O_2; R_2)$ касаются в точке M. Отсюда также следует, что

$$H(O_2; R_2) \subset H(O_1; R_1). \qquad (26)$$

Лемма доказана.

Упражнения

4. Пусть $P(0) \in S$ — некоторое выпуклое множество на плоскости и в процессе движения с постоянной линейной скоростью $\rho > 0$ точка P не может покинуть множество S. Доказать, что в этом случае множество достижимости игрока P из начального положения $P(0)$ к моменту времени t имеет вид

$$S \cap H(P(0); \rho t). \qquad (27)$$

5. Пусть $H(P(0); \rho t)$ — множество достижимости игрока P к моменту времени t (лемма 1), точка $M \in S(P(0); \rho t)$ и игрок P, начиная с момента времени

$t = 0$, перемещается по полупрямой $[\overrightarrow{P(0), M})$. Рассмотрим множество достижимости $H(P(t_1); \rho(t - t_1))$, где $0 < t_1 < t$, т. е. множество достижимости игрока P из начального положения $P(t_1)$ к моменту времени t (за время $t - t_1$). Доказать справедливость следующего соотношения:

$$M \in H(P(t_1); \rho(t - t_1)) \subset H(P(0); \rho t). \qquad (28)$$

6. Пусть $S(O_1; R_1)$ и A — окружность и точка Аполлония, соответствующие начальным положениям $P(0)$ и $E(0)$. Доказать, что A — точка на окружности $S(O_1; R_1)$, наиболее удаленная от точки $P(0)$.

7. Пусть игрок P перемещается на плоскости с постоянной линейной скоростью $\rho > 0$, $t > 0$ и $z \in H(P(0); \rho(t) \backslash S(P(0); \rho t)$ (см. доказательство леммы 1, утверждения б)). Рассмотрим некоторую одновершинную ломаную $[P(0), A, z]$ такую, что игрок P, перемещаясь до момента времени $|P(0)A|/\rho$ по полупрямой $[\overrightarrow{P(0), A})$, а затем, перемещаясь по полупрямой $[\overrightarrow{A, z})$, в момент времени t оказывается в точке z. Зафиксируем точку z и рассмотрим множество всех таких одновершинных ломаных $[P(0), A, z]$. Найти геометрическое место точек A.

8. Пусть $\rho > \sigma > 0$, $S(O_1; R_1)$ и $A(P(0); E(0))$ — точка и окружность Аполлония, соответствующие положениям $P(0)$ и $E(0)$, M — точка на окружности $S(O_1; R_1)$, отличная от $A(P(0), E(0))$, и игроки P и E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещаются по полупрямым $[\overrightarrow{P(0), M})$ и $[\overrightarrow{E(0), M})$ соответственно. Найти геометрическое место точек Аполлония, соответствующих всем промежуточным положениям $P(t)$ и $E(t)$, $0 \leqslant t \leqslant |E(0)M|/\sigma$.

9. Пусть $\rho > \sigma > 0$, M — точка на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$, соответствующей положениям $P(0)$ и $E(0)$, и игроки P и E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещаются по полупрямым $[\overrightarrow{P(0), M})$ и $[\overrightarrow{E(0), M})$ соответственно, а $S(O_2; R_2)$ и A_1 — окружность и точка Аполлония, соответствующие некоторой паре промежуточных положений $P(t_1)$ и $E(t_1)$, $0 \leqslant t_1 \leqslant |E(0)M|/\sigma$.

Доказать неравенство

$$|E(0)E(t_1)| + |E(t_1)A_1| \leqslant |E(0)A|, \qquad (29)$$

где A — точка Аполлония, соответствующая положениям $P(0)$ и $E(0)$.

§ 3. Стратегия параллельного сближения

Пусть преследователь P и убегающий E перемещаются на плоскости в соответствии с простым движением с постоянными линейными скоростями ρ и σ, $\rho \geqslant \sigma > 0$. Систему координат на плоскости выберем таким образом, чтобы в момент времени $t = 0$ игроки P и E находились

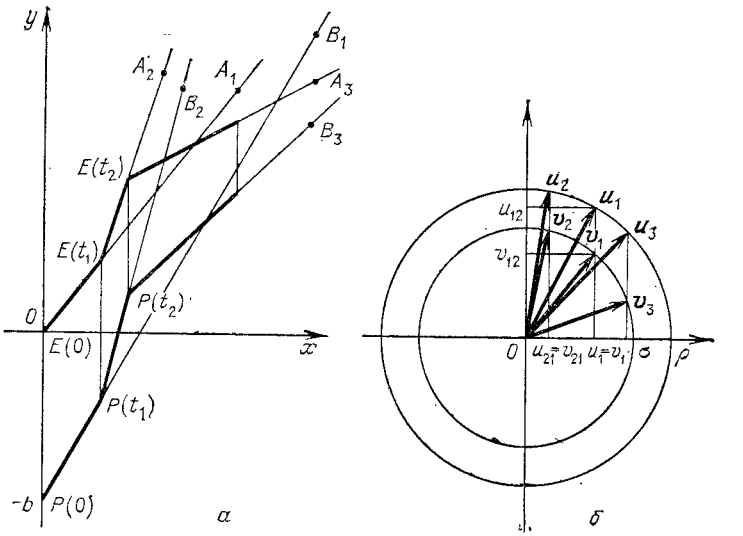


Рис. 12

в положениях $P(0)=(0, -b)$ и $E(0)=(0, 0)$, где $b = |P(0)E(0)| > 0$. Укажем для игрока P один способ преследования игрока E.

Пусть игрок E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), A_1)}$ (рис. 12, *а*), т. е. с вектор-скоростью $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$, $v_{11}^2 + v_{12}^2 = \sigma^2$ (рис. 12, *б*). По условию игры в момент времени $t = 0$ игрок P знает $P(0)$, $E(0)$ и $\overrightarrow{[E(0), A_1)}$, т. е. вектор-скорость $\mathbf{v}_1$. Пока E перемещается с вектор-скоростью $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$, предпишем для P, начиная с момента времени $t = 0$, движение с вектор-скоростью

$$\mathbf{u}_1 = (u_{11}, u_{12}) = \left(v_{11}, \sqrt{\rho^2 - v_{11}^2}\right), \qquad (30)$$

т. е. по полупрямой $[\overrightarrow{P(0), B_1)}$, $\overrightarrow{P(0)B_1} \uparrow\uparrow \mathbf{u}_1$ (см. список обозначений).

Пусть в момент времени $t = t_1 > 0$ игрок E решил изменить направление своего движения и начал перемещаться по некоторой полупрямой $[\overrightarrow{E(t_1), A_2)}$, т. е. с вектор-скоростью $\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22})$, $v_{21}^2 + v_{22}^2 = \sigma^2$, при этом предположим, что на промежутке времени $[0, t_1]$ встреча P с E не произошла. Тогда, начиная с момента времени $t = t_1$, игроку P предпишем движение с вектор-скоростью

$$\mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22}) = \left(v_{21}, \sqrt{\rho^2 - v_{21}^2}\right), \tag{31}$$

т. е. по полупрямой $[\overrightarrow{P(0), B_2)}$, $\overrightarrow{P(0)B_2} \uparrow\uparrow \mathbf{u}_2$.

Если игрок E в некоторый момент времени $t_2 > t_1$ вновь изменяет направление движения, то игрок P изменяет направление своего движения описанным выше способом, и т. д.

При таком способе преследования игроком P игрока E для всех $t \geqslant 0$ (до момента встречи P с E) отрезок $[P(t), E(t)]$ параллелен отрезку $[P(0), E(0)]$. Действительно, при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ из формул (30) и (31) для $P(t) = (P_1(t), P_2(t))$ и $E(t) = (E_1(t), E_2(t))$ имеем (см. (1))

$$E(t) = (E_1(t), E_2(t)) = (tv_{11}, tv_{12}),$$

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t)) = \left(tv_{11}, t\sqrt{\rho^2 - v_{11}^2} - b\right),$$

т. е. $P_1(t) = E_1(t)$ при всех $0 \leqslant t \leqslant t_1$, следовательно, отрезок $[P(t), E(t)]$ параллелен отрезку $[P(0), E(0)]$ на этом промежутке времени. В частности, $[P(0), E(0)] \parallel [P(t_1), E(t_1)]$. Однако на отрезке $[t_1, t_2]$ $u_{21} = v_{21}$, или, что то же, $E_1(t) = P_1(t)$, следовательно, $[P(t), E(t)] \parallel [P(t_1), E(t_1)] \parallel [P(0), E(0)]$. При $t > t_2$ доказательство проводится аналогично.

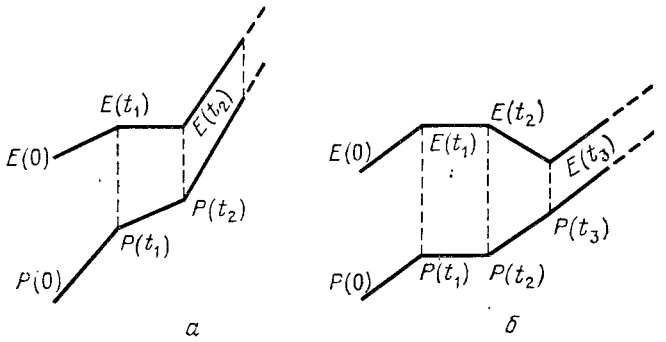
Такой способ преследования игроком P убегающего E назовем *стратегией параллельного сближения* или П-*стратегией*. На рис. 13, *а*, *б* в случаях $\rho > \sigma$ и $\rho = \sigma$ соответственно указаны примеры траекторий игрока P при применении им П-стратегии.

Следующая лемма в случае $\rho > \sigma$ устанавливает связь П-стратегии с окружностью Аполлония $S(O_1; R_1)$, соответствующей положениям $P(0) = (0, -b)$ и $E(0) = (0, 0)$.

Лемма 8. *Пусть* $\rho > \sigma$, M — *некоторая точка на окружности Аполлония* $S(O_1; R_1)$ *и игрок* E *перемещает-*

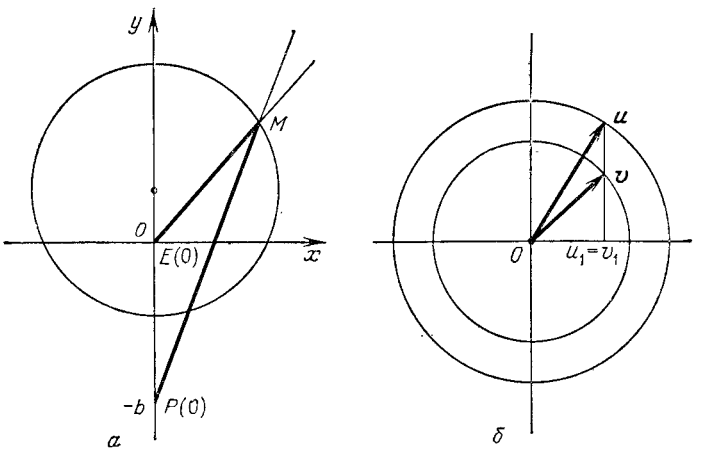
ся по полупрямой $[\overrightarrow{E(0), M})$. *Тогда* П-*стратегия предписывает для* P *движение по полупрямой* $[\overrightarrow{P(0), M})$.

Доказательство. Перемещение игрока E по полупрямой (рис. 14, *а*) означает, что он двигается с



а *б*

Рис. 13



а *б*

Рис. 14

вектор-скоростью (рис. 14, *б*)

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2), \qquad v_1^2 + v_2^2 = \rho^2, \tag{32}$$

$\mathbf{v} \uparrow\uparrow \overrightarrow{E(0)M}$. Тогда П-стратегия предписывает для игрока P движение с вектор-скоростью

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) = \left(v_1, \sqrt{\rho^2 - v_1^2}\right). \tag{33}$$

Из формул (32) и (33) для $P(t)$ и $E(t)$ при $t \geqslant 0$ имеем

$$E(t) = (E_1(t), E_2(t)) = (tv_1, tv_2), \tag{34}$$

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t)) = \left(tv_1, -b + t\sqrt{\rho^2 - v_1^2}\right). \tag{35}$$

Определим момент времени $t > 0$, при котором происходит встреча P с E, т. е. $P(t) = E(t)$. Для этого достаточно выполнения равенства

$$P_2(t) = E_2(t), \tag{36}$$

поскольку из (34) и (35) имеем $P_1(t) = E_1(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Воспользуясь (34) и (35), уравнение (36) можно переписать в виде

$$tv_2 = -b + t\sqrt{\rho^2 - v_1^2},$$

откуда

$$t_1 = \frac{b}{\sqrt{\rho^2 - v_1^2} - v_2}. \tag{37}$$

Из неравенств

$$\rho^2 > \sigma^2 = v_1^2 + v_2^2,$$

$$\rho^2 - v_1^2 > v_2^2,$$

$$\sqrt{\rho^2 - v_1^2} > |v_2| \geqslant v_2$$

следует, что в формуле (37) знаменатель

$$\sqrt{\rho^2 - v_1^2} - v_2 > 0. \tag{38}$$

Подставляя (37) в (34) и (35), получим, что встреча P и E происходит в точке

$$P(t_1) = E(t_1) = \left(\frac{bv_1}{\sqrt{\rho^2 - v_1^2} - v_2}, \frac{bv_2}{\sqrt{\rho^2 - v_1^2} - v_2}\right). \tag{39}$$

Легко убедиться, что точка, определяемая формулой (39), лежит на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$, т. е. координаты точки (39) удовлетворяют уравнению (см. (7))

$$x^2 + \left(y^2 - \frac{b\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma\rho b}{\rho^2 - \sigma^2}\right)^2. \tag{40}$$

Таким образом, если E перемещается по $\overrightarrow{[E(0), M)}$, а P применяет П-стратегию, то встреча с E произойдет на

окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$, т. е. П-стратегия предписывает для P движение по $\overrightarrow{[P(0), M)}$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть* $\rho > \sigma \geqslant 0$; *тогда для любого* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $v_1^2 + v_2^2 = \sigma^2$, *имеет место неравенство*

$$\sqrt{\rho^2 - v_1^2} - v_2 \geqslant \rho - \sigma. \tag{41}$$

Доказательство. Умножим обе стороны неравенства (41) на $\sqrt{\rho^2 - v_1^2} + v_2 > 0$ (см. (38)):

$$\left(\sqrt{\rho^2 - v_1^2}\right)^2 - v_2^2 \geqslant (\rho - \sigma)\left(\sqrt{\rho^2 - v_1^2} + v_2\right),$$

$$\rho^2 - v_1^2 - v_2^2 \geqslant (\rho - \sigma)\left(\sqrt{\rho^2 - v_1^2} + v_2\right),$$

$$\rho + \sigma \geqslant \sqrt{\rho^2 - v_1^2} + v_2.$$

Последнее неравенство справедливо для любого $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $v_1^2 + v_2^2 = \sigma^2$, поскольку

$$\rho \geqslant \sqrt{\rho^2 - v_1^2}, \quad \sigma \geqslant |v_2| \geqslant v_2.$$

Лемма доказана.

Упражнения

10. Проверить, что точка, определяемая формулой (39), удовлетворяет уравнению (40).

11. Пусть $\rho > \sigma > 0$ и игроки P и E в момент времени $t = 0$ находятся в положениях $P(0) = (0, 0)$ и $E(0) = (a, 0)$, $a > 0$. Определить закон движения точки P в следующих двух случаях:

а) E движется по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), E(0))}$, а P использует П-стратегию;

б) E движется по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), P(0))}$, а P использует П-стратегию.

12. Пусть $\rho > \sigma > 0$, E перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{[E(0), M)}$, а P использует П-стратегию, перемещаясь при этом по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), N)}$. Доказать, что всегда

$$\angle E(0)P(0)N < 90°.$$

13. Пусть M — точка на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$, соответствующей положениям $P(0)$ и $E(0)$, игроки P и E перемещаются по полупрямым $[P(0), M)$ и $[E(0), M)$ соответственно, а $\alpha = \angle AE(0)M$, $\beta = \angle AP(0)M$, где $A = A(P(0), E(0))$ — точка Аполлония. Доказать равенство

$$\sigma \sin \alpha = \rho \sin \beta.$$

14. Пусть $\rho = 1$, $\sigma = 1$, $P(0) = (0, 0)$, $E(0) = (2, 0)$. Рассмотрим квадрат K с вершинами в точках $(2, 1)$, $(4, 1)$, $(4, -1)$, $(2, -1)$. Предпишем игроку E движение вдоль границы квадрата K по часовой стрелке. Пусть P использует П-стратегию. Определите траекторию движения P до момента встречи с E и момент встречи.

ГЛАВА II
ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 4. Преследование на плоскости с одним преследователем

В этом параграфе рассмотрим игру $\Gamma(1, 1)$*). На плоскости преследователь P и убегающий E перемещаются в соответствии с простым движением с постоянными линейными скоростями ρ и σ. Преследование начинается в момент времени $t = 0$ из начальных положений $P(0)$ и $E(0)$,

$$|P(0)E(0)| = b > 0.$$

Рассмотрим случай $\rho > \sigma$. Пусть $S(O_0, R_0)$ и A_0 — окружность и точка Аполлония, соответствующие положениям $P(0)$ и $E(0)$ (см. § 2, п. 1.2).

Теорема 1. *Пусть $\rho > \sigma$; тогда в игре $\Gamma(1, 1)$ из начальных положений $P(0)$ и $E(0)$ возможно завершение преследования и оптимальное время преследования равно $\theta = b/(\rho - \sigma)$. Оптимальной для преследователя P является П-стратегия, а оптимальным для убегающего E — движение по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), A_0)}$.*

Доказательство. Пусть убегающий E перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), A_0)}$. Из леммы 5, когда $M_1 = A_0$, следует, что P не может осуществить встречу с E до момента времени

$$\frac{|E(0)A_0|}{\sigma} = \frac{b\sigma}{(\rho - \sigma)\cdot\sigma} = \frac{b}{\rho - \sigma} = \theta,$$

т. е. если E перемещается оптимальным способом, то P не может осуществить встречу с ним до момента времени θ.

*) В литературе по теории игр $\Gamma(1, 1)$ называют «преследование корабля катером-перехватчиком в открытом море».

Теперь докажем, что если игрок E перемещается каким-то другим способом и двигается по некоторой ломаной траектории, а P использует П-стратегию, то встреча P с E произойдет не позже, чем за время θ.

Не ограничивая общности, предположим, что в начале игры P и E находятся в положениях $P(0)=(0, -b)$ и $E(0)=(0, 0)$.

Пусть игрок E, начиная с момента времени $t=0$, перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{[E(0), B_1)}$

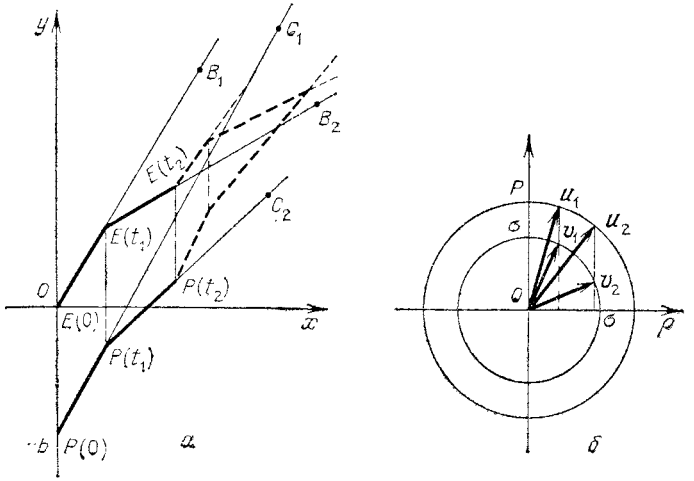


Рис. 15

(рис. 15, *а*), т. е. с вектор-скоростью (рис. 15, *б*)

$$\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12}), \quad v_{11}^2 + v_{12}^2 = \sigma^2. \tag{42}$$

Поскольку П-стратегия предписывает для игрока P движение с вектор-скоростью (см. (30))

$$\mathbf{u}_1 = (u_{11}, u_{12}) = \left(v_{11}, \sqrt{\rho^2 - v_{11}^2}\right), \tag{43}$$

то из (42) и (43) для положений $P(t)$ и $E(t)$ при $t \geqslant 0$ имеем (см. (1))

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t)) = \left(tv_{11}, -b + t\sqrt{\rho^2 - v_{11}^2}\right),$$
$$E(t) = (E_1(t), E_2(t)) = (tv_{11}, tv_{12});$$

отсюда и из леммы 9, когда $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$, при $t \geqslant 0$ получаем

$$E_2(t) - P_2(t) = b - t\left(\sqrt{\rho^2 - v_{11}^2} - v_{12}\right) \leqslant b - t(\rho - \sigma). \quad (44)$$

Пусть игрок E в момент времени $t = t_1$ решил изменить направление своего движения и начал перемещаться по некоторой полупрямой $\overrightarrow{[E(t_1),\ B_2)}$, т. е. с вектор-скоростью

$$\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22}), \quad v_{21}^2 + v_{22}^2 = \sigma^2. \quad (45)$$

Тогда П-стратегия предписывает для P, начиная с момента времени $t = t_1$, движение с вектор-скоростью

$$\mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22}) = \left(v_{21}, \sqrt{\rho^2 - v_{21}^2}\right), \quad (46)$$

и из (45) и (46) для положений $P(t)$ и $E(t)$ при $t \geqslant t_1$ получаем (см. (2))

$$P(t) = (P_1(t), P_2(t)) =$$

$$= \left(P_1(t_1) + (t - t_1)v_{21},\ P_2(t_1) + (t - t_1)\sqrt{\rho^2 - v_{21}^2}\right),$$

$$E(t) = (E_1(t),\ E_2(t)) =$$

$$= (E_1(t_1) + (t - t_1)v_{21},\ E_2(t_1) + (t - t_1)v_{22}).$$

Отсюда при $t \geqslant t_1$ получаем

$$E_2(t) - P_2(t) = E_2(t_1) - P_2(t_1) - (t - t_1)\left(\sqrt{\rho^2 - v_{21}^2} - v_{22}\right). \quad (47)$$

Из (44), в частности, при $t = t_1$ следует

$$E_2(t_1) - P_2(t_1) \leqslant b - t_1(\rho - \sigma). \quad (48)$$

Теперь из леммы 9 и формулы (48) получаем, что (см. (47)) при $t \geqslant t_1$

$$E_2(t) - P_2(t) \leqslant b - t_1(\rho - \sigma) - (t - t_1)(\rho - \sigma) =$$

$$= b - t(\rho - \sigma),$$

т. е. неравенство (44) верно и при $t \geqslant t_1$. Если игрок E в некоторый момент времени $t = t_2$ снова изменяет направление своего движения, то вполне аналогичным образом можно показать, что при $t \geqslant t_2$

$$E_2(t) - P_2(t) \leqslant b - t(\rho - \sigma)$$

и т. д.

Таким образом, если движение E происходит по некоторой ломаной, а P использует П-стратегию, то для всех $t \geqslant 0$

$$E_2(t) - P_2(t) \leqslant b - t(\rho - \sigma). \qquad (49)$$

Поскольку при таком способе преследования $P_1(t) = E_1(t)$ для всех $t \geqslant 0$, то очевидно, что встреча P с E происходит

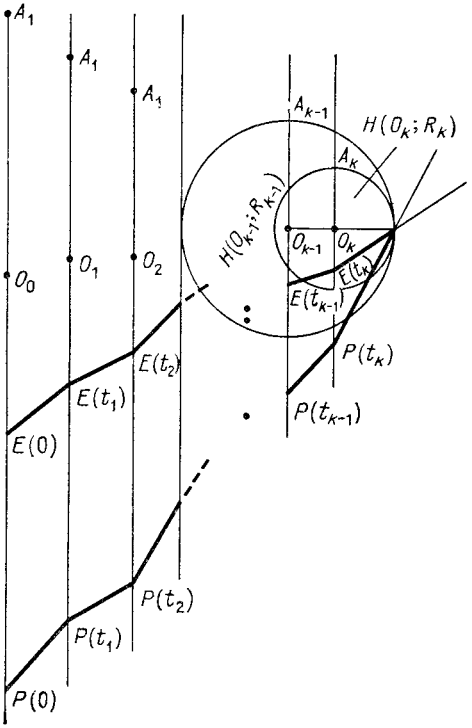


Рис. 16

в момент времени t, когда $E_2(t) - P_2(t) = 0$, т. е. $E_2(t) = P_2(t)$.

Правая часть неравенства (49) обращается в нуль в момент времени

$$t = \frac{b}{\rho - \sigma} = \theta,$$

отсюда получаем, что левая часть неравенства (49) обращается в нуль в некоторый момент времени $\tilde{t}$, $\tilde{t} \leqslant \theta$, т. е. $E_2(\tilde{t}) = P_2(\tilde{t})$ в момент времени $\tilde{t}$, следовательно, встреча

P с E происходит за время, не превосходящее θ. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\rho > \sigma$ *и игрок* P *использует* П-*стратегию; тогда при любом способе движения игрока* E *на плоскости встреча* P с E *происходит в круге* $H(O_0, R_0)$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что при любом способе перемещения игрока E по ломаным траекториям встреча P с E произойдет за время, не большее чем $\theta = b/(\rho - \sigma)$.

Рассмотрим некоторую траекторию игрока E на плоскости до момента встречи с P. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k$, $0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \theta$,— моменты времени, когда E изменяет направление своего движения. Из леммы 4 следует, что отрезок $[P(0), E(0)]$ параллелен каждому из отрезков $[P(t_1), E(t_1)]$, $[P(t_2), E(t_2)]$, ..., $[P(t_k), E(t_k)]$ (рис. 16, *а*). Пусть $S(O_1; R_1)$, $S(O_2; R_2), \ldots, S(O_{k-1}; R_{k-1})$, $S(O_k; R_k)$— окружности Аполлония, соответствующие положениям $P(t_1)$ и $E(t_1)$, $P(t_2)$ и $E(t_2)$, ..., $P(t_{k-1})$ и $E(t_{k-1})$, $P(t_k)$ и $E(t_k)$. Из определения окружности Аполлония $S(O_k; R_k)$ следует, что встреча P с E происходит на $S(O_k; R_k)$. Очевидно, что

$$S(O_k; R_k) \subset H(O_k; R_k). \tag{50}$$

Из формулы (26) вытекает, что (рис. 16, *а*, *б*)

$$H(O_k; R_k) \subset H(O_{k-1}; R_{k-1}) \subset \ldots \subset H(O_1; R_1) \subset H(O_0; R_0),$$

отсюда и из (50) получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Упражнения

15. Докажите, что если $\rho \leqslant \sigma$, то в игре $\Gamma(1, 1)$ из любых начальных положений $P(0)$ и $E(0)$, $|P(0)E(0)| > 0$ возможно убегание.

16. Пусть $\rho > \sigma > 0$, $H(P(0); \rho t)$, $H(E(0); \sigma t)$— множества достижимости игроков P и E соответственно из начальных положений $P(0)$ и $E(0)$ к моменту времени t.

а) Докажите, что существует такой момент времени $t_1 > 0$, что

$$H(P(0), \rho t_1) \supset H(E(0), \sigma t_1).$$

б) Обозначим символом $\bar{t}$ наименьший момент времени t_1, для которого имеет место предыдущее включение. Докажите, что $\bar{t} = \theta$ (оптимальное время преследования в игре $\Gamma(1, 1)$ из начальных положений $P(0)$ и $E(0)$).

17. Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; S)$, где S — выпуклое множество. Пусть в момент времени $t = 0$ игроки P и E

находятся в $S(P(0) \in S,\ E(0) \in S)$ и в процессе преследования не могут покинуть множество S. Доказать, что в этом случае

$$\theta = \frac{|P(0)E(0)|}{\rho - \sigma}$$

является гарантированным временем преследования.

§ 5. Преследование в полуплоскости с одним преследователем

В этом параграфе мы рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; L)$, где L — полуплоскость с границей l и $\rho > \sigma > 0$. Преследователь P и убегающий E в момент времени $t = 0$ находятся в положениях $P(0)$ и $E(0)$, $|P(0)E(0)| > 0$.

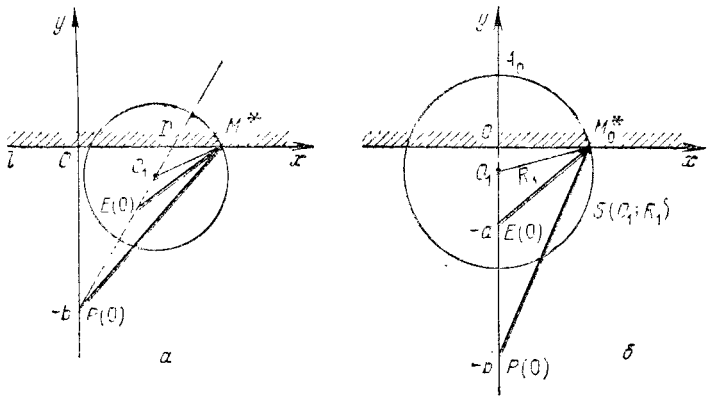


Рис. 17

Расстояние от точки $P(0)$ до прямой l обозначим буквой b. На плоскости введем систему координат xOy таким образом, чтобы (рис. 17, $а$)

$$L = \{(x, y):\ y \leqslant 0\},\quad P(0) = (0, -b).$$

Мы будем говорить, что решение игры $\Gamma(1, 1; L)$ сводится к решению игры $\Gamma(1, 1)$, если оптимальное время преследования в игре $\Gamma(1, 1; L)$ совпадает с оптимальным временем преследования в игре $\Gamma(1, 1)$ относительно положений $P(0)$ и $E(0)$. Зафиксируем положение $P(0)$ игрока P; тогда существуют такие положения $E(0)$ игрока E, что решение игры $\Gamma(1, 1; L)$ из этих начальных положений $P(0)$ и $E(0)$ сводится к решению игры $\Gamma(1, 1)$. Справедлива следующая

Лемма 10. *Решение игры* $\Gamma(1, 1; L)$ *из начальных положений* $P(0)$ *и* $E(0)$ *сводится к решению игры* $\Gamma(1, 1)$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*: а) *полупрямая* $[P(0), E(0))$ *не пересекается с прямой* l; б) *полупрямая* $[P(0), E(0))$ *пересекает прямую* l *и имеет место неравенство*

$$\frac{|E(0)D|}{\sigma} \geqslant \frac{|P(0)D|}{\rho}, \tag{51}$$

где $D = [P(0), E(0)) \cap l$.

Доказательство леммы предоставляется читателю.

Отметим геометрический смысл неравенства (51): если игроки P и E будут перемещаться по полупрямым $\overrightarrow{[P(0), D)}$ и $\overrightarrow{[E(0), D)}$ соответственно, то E окажется в точке D позже игрока P.

Поэтому будем предполагать, что для положений $P(0)$ и $E(0)$ выполнено неравенство

$$\frac{|E(0)D|}{\sigma} < \frac{|P(0)D|}{\rho}, \tag{52}$$

В этом случае окружность Аполлония $S(O_1, R_1)$, соответствующая положениям $P(0)$ и $E(0)$, пересекается с прямой l в двух точках. Символом M^* обозначим ту из них, которая лежит на большем расстоянии от точки $E(0)$, или любую из них, если обе лежат на одинаковом расстоянии от $E(0)$, и назовем ее точкой Аполлония в игре $\Gamma(1, 1; L)$.

Приведем сначала решение игры $\Gamma(1, 1; L)$ в одном частном случае.

1. *Случай* $[P(0)E(0)) \perp l$. Предположим, что игрок E находится в начале игры в точке $E(0) = (0, -a)$, $a \geqslant 0$ (рис. 17, *б*).

Неравенство (52) в этом случае принимает вид

$$\frac{a}{\sigma} < \frac{b}{\rho}, \tag{53}$$

т. е. если игроки P и E, начиная с момента времени $t = 0$, будут двигаться по полупрямым $\overrightarrow{[P(0), 0)}$ и $\overrightarrow{[E(0), 0)}$ соответственно, то игрок E окажется в точке $O = (0, 0)$ раньше игрока P. Окружность Аполлония $S(O_0', R_0')$, соответствующая положениям $P(0) = (0, -b)$ и $E(0) = (0, -a)$, где (см. (9)—(12))

$$O_0' = \left(0, \frac{b\sigma^2 - a\rho^2}{\rho^2 - \sigma^2}\right), \quad R_0' = \frac{\sigma\rho(b-a)}{\rho^2 - \sigma^2}, \tag{54}$$

пересекается с l в двух точках $\left(\pm\sqrt{\frac{b^2\sigma^2-a^2\rho^2}{\rho^2-\sigma^2}},\ 0\right)$. Так как обе эти точки лежат на одинаковом расстоянии от точки $E(0)$, то в данном случае точкой Аполлония в игре $\Gamma(1,\ 1;\ L)$ для начальных положений $P(0)=(0,\ -b)$ и $E(0)=(0,\ -a)$ является точка

$$M_0^*=\left(\sqrt{\frac{b^2\sigma^2-a^2\rho^2}{\rho^2-\sigma^2}},\ 0\right). \tag{55}$$

Из (55) имеем

$$|E(0)M_0^*|=\sigma\sqrt{\frac{b^2-a^2}{\rho^2-\sigma^2}}. \tag{56}$$

Пусть игрок E, начиная с момента времени $t=0$, перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{[E(0),\ B)}$, а игрок P применяет II-стратегию. Предположим, что при таком движении существует момент времени $t=t_1$, при котором имеет место равенство (рис. 18)

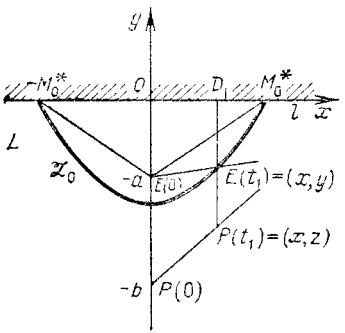


Рис. 18

$$\frac{|E(t_1)D_1|}{\sigma}=\frac{|P(t_1)D_1|}{\rho}, \tag{57}$$

где $D_1=[P(0),\ E(0))\cap l$ — точка пересечения полупрямой $[P(0),\ E(0))$ и границы l, т. е. в момент времени $t=t_1$ неравенство (53) для положений $P(t_1)$ и $E(t_1)$ не выполняется. В момент времени $t=t_1$ выполняется также условие

$$\frac{|E(0)E(t_1)|}{\sigma}=\frac{|P(0)P(t_1)|}{\rho}. \tag{58}$$

Очевидно, что такая полупрямая $[E(0),\ B)$ всегда существует, например, этим свойством обладает полупрямая, параллельная границе полуплоскости L.

Рассмотрим семейство полупрямых $[E(0),\ B)$, для которых такой момент t_1 существует. На каждой из полупрямых этого семейства зафиксируем точку $E(t_1)$, удовлетворяющую (57), (58), и рассмотрим множество таких точек $E=(x,\ y)$.

Справедлива следующая

Лемма 11. *Геометрическое место* $E=(x,\ y)$ *является куском параболы.*

Доказательство. Из определения П-стратегии следует, что при ее использовании игроком P положению $E(t_1)=(x,\ y)$ будет соответствовать положение $P(t_1)=(x,\ z)$ игрока P, т. е. абсциссы точек $E(t_1)$ и $P(t_1)$ совпадают. Отсюда, учитывая, что (рис. 18)

$$|E(0)E(t_1)| = \sqrt{x^2+(y+a)^2},$$

$$|P(0)P(t_1)| = \sqrt{x^2+(z+b)^2},$$

имеем

$$|E(t_1)D_1| = y, \quad |P(t_1)D_1| = z.$$

Соотношения (57) и (58) можем переписать в виде

$$\frac{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}{\sigma} = \frac{\sqrt{x^2+(z+b)^2}}{\rho},$$

$$\frac{y}{\sigma} = \frac{z}{\rho}, \tag{59}$$

Из второго уравнения (59) имеем

$$z = \frac{\rho y}{\sigma}. \tag{60}$$

Возведя в квадрат обе части первого уравнения системы (59) и учитывая (60), получаем

$$\rho^2[x^2+(y+a)^2] = \sigma^2\left[x^2+\left(\frac{\rho y}{\sigma}+b\right)^2\right],$$

$$\rho^2x^2+\rho^2y^2+2\rho^2ay+\rho^2a^2 = \sigma^2x^2+\rho^2y^2+2\rho\sigma by+\sigma^2b^2,$$

$$2\rho(\sigma b-\rho a)y = (\rho^2-\sigma^2)x^2-(\sigma^2b^2-\rho^2a^2),$$

$$y = \frac{\rho^2-\sigma^2}{2\rho(\sigma b-\rho a)}x^2-\frac{\sigma b+\rho a}{2\rho}. \tag{61}$$

Мы получили уравнение параболы. Легко убедиться, что парабола (56) пересекает прямую l в точках $-M_0^*$ и M_0^*. Следовательно, в уравнении (61) (см. (55))

$$|x| \leqslant \sqrt{\frac{b^2\sigma^2-a^2\rho^2}{\rho^2-\sigma^2}}. \tag{62}$$

Таким образом, геометрическое место точек $E=(x,\ y)\in L$, удовлетворяющих условиям (57) и (58), является куском параболы (61), где переменная x удовлетворяет условию (62). Лемма доказана.

Параболу (61) с ограничением (62) назовем *границей перехода* игры $\Gamma(1, 1; L)$ к игре $\Gamma(1, 1)$ из начальных положений $P(0)$ и $E(0)$ и обозначим $\mathscr{L}_0$. Теперь выясним геометрический смысл кривой $\mathscr{L}_0$. Пусть игрок E, начиная с момента времени $t=0$, перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{[E(0), B)}$, пересекающей кривую $\mathscr{L}_0$, а игрок P применяет П-стратегию. Тогда в момент времени $t=t_1$, когда точка $E(t_1)$ оказывается на $\mathscr{L}_0$, решение игры $\Gamma(1, 1; L)$ из положений $P(t_1)$ и $E(t_1)$ сводится к решению игры $\Gamma(1, 1)$. Справедлива следующая

Лемма 12. *Пусть M — точка на окружности Аполлония $S(O_0; R_0)$ относительно положений $P(0)$ и $E(0)$. Полупрямая $[E(0), M)$ пересекается с кривой $\mathscr{L}_0$ тогда и только тогда, когда $M \in S(O_0; R_0) \cap (L \setminus l)$, т. е. если игрок E перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), M)}$, где $M \in S(O_0; R_0) \cap (L \setminus l)$, и P использует П-стратегию, то существует момент времени $t=t_1$ такой, что для положений $P(t_1)$ и $E(t_1)$ выполнено условие* (57).

Лемма 13. *Пусть игрок E, начиная с момента времени $t=0$, перемещается по некоторой полупрямой $\overrightarrow{[E(0), B)}$, при этом P использует П-стратегию, а в момент времени $t=t_1$ для положений $P(t_1)=(P_1(t_1), P_2(t_1))$ и $E(t_1)=(E_1(t_1), E_2(t_1))$ выполнено условие*

$$\frac{E_2(t_1)}{\sigma} < \frac{P_2(t_1)}{\rho}, \tag{63}$$

Тогда имеет место неравенство

$$|E(0)E(t_1)| + |E(t_1)M_1^*| \leqslant |E(0)M_0^*|, \tag{64}$$

где M_1^* — точка Аполлония в игре $\Gamma(1, 1; L)$ относительно местоположений $P(t_1)$ и $E(t_1)$.

Доказательство. Пусть игрок E, начиная с момента времени $t=0$, перемещается с вектор-скоростью $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$ (рис. 19, *б*); тогда П-стратегия предписывает для P движение с вектор-скоростью $\mathbf{u}=\left(v_1, \sqrt{\rho^2-v_1^2}\right)$ (см. (30)). Учитывая, что (см. рис. 19, *а*) $E(t_1)=(t_1v_1, -a+t_1v_2)$, $P(t_1)=\left(t_1v_1, -b+t_1\sqrt{\rho^2-v_1^2}\right)$ (см. (34), (35)), из формул (55) и (63) имеем

$$M_1^* = \left(\sqrt{\frac{\left(-b+t_1\sqrt{\rho^2-v_1^2}\right)^2\sigma^2 - (-a+t_1v_2)^2\rho^2}{\rho^2-\sigma^2}}, 0 \right),$$

отсюда

$$|E(t_1)M_1^*| = \frac{\sigma}{\sqrt{\rho^2-\sigma^2}}\sqrt{\left(-b+t_1\sqrt{\rho^2-v_1^2}\right)^2-(-a+t_1v_2)^2}. \tag{65}$$

Теперь из (56), (65), учитывая, что $E(t_1)=\sigma t_1$, неравенство (64) можем переписать в виде

$$t_1+\frac{1}{\sqrt{\rho^2-\sigma^2}}\sqrt{\left(-b+t_1\sqrt{\rho^2-v_1^2}\right)^2-(-a+t_1v_2)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{\rho^2-\sigma^2}}. \tag{66}$$

Перенесем t_1 в правую часть неравенства (66). Учиты-

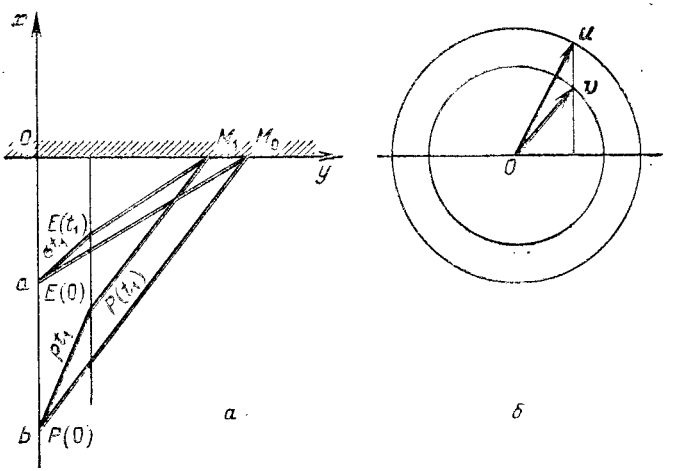


Рис. 19

вая, что $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{\rho^2-\sigma^2}}>t_1>0$, возведем обе стороны неравенства (66) в квадрат. Тогда получим

$$b\sqrt{\rho^2-v_1^2}-av_2\geqslant\sqrt{b^2-a^2}\sqrt{\rho^2-\sigma^2}. \tag{67}$$

Поскольку $b>a$, то

$$b\sqrt{\rho^2-v_1^2}-av_2>a\left(\sqrt{\rho^2-v_1^2}-v_2\right)\geqslant 0.$$

Возведя в квадрат обе стороны неравенства (67), получим

$$b^2v_2^2+a^2\left(\rho^2-v_1^2\right)-2abv_2\sqrt{\rho^2-v_1^2}\geqslant 0,$$

отсюда

$$\left(bv_2 - a\sqrt{\rho^2 - v_1^2}\right)^2 \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть игрок E, начиная с момента времени $t=0$, перемещается по некоторой полупрямой* $\overrightarrow{[E(0), B)}$, *пересекающейся с кривой $\mathscr{L}_0$, и в момент времени $t=t_1$ $E(t_1)\in\mathscr{L}_0$, а игрок P использует* П-*стратегию. Тогда имеет место неравенство* (ср. (64))

$$|E(0)E(t_1)| + |E(t_1)D_1| \leqslant |E(0)M_0^*|, \qquad (68)$$

где $D_1 = [P(t_1), E(t_1))\cap l$.

Доказать лемму предоставляем читателю.

Теорема 3. *Пусть $\rho > \sigma > 0$ и для начальных положений $P(0)$ и $E(0)$ выполнено неравенство* (53). *Тогда в игре $\Gamma(1, 1; L)$ оптимальное время преследования равно* $\theta = \sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{\rho^2-\sigma^2}}$ (*см.* (56)). *Оптимальной для игрока P является* П-*стратегия, а оптимальным для игрока E — движение по полупрямой* $\overrightarrow{[E(0), M_0^*)}$.

Доказательство. Пусть убегающий E перемещается по полупрямой $[E(0), M_0^*)$ (см. рис. 17, *б*). Из леммы 5, когда $M_1 = M_0^*$, следует, что P не может осуществить встречу с E до момента времени (см. (56))

$$\frac{|E(0)M_0^*|}{\sigma} = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{\rho^2-\sigma^2}} = \theta,$$

т. е. если E перемещается оптимальным способом, то P не может осуществить встречу с ним до момента времени θ.

Пусть игрок E перемещается в полуплоскости не обязательно оптимальным способом и двигается по некоторой ломаной, а P использует П-стратегию. Тогда из теоремы 1 (см. упражнение 17) следует, что встреча P с E происходит за время θ_1, не большее чем $\dfrac{b-a}{\rho-\sigma}$. Покажем, что $\theta_1 \leqslant \theta$. Здесь возможны два случая: а) встреча P с E происходит в некоторой точке $M_1 \in l$; б) встреча P с E происходит в некоторой точке $M_2 \in L\backslash l$.

а) Рассмотрим первый случай. Пусть $E(t_1)$, $E(t_2)$, ..., $E(t_{k-1})$, $E(t_k)$ — вершины ломаной траектории игрока

E (рис. 20), где $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \theta_1$ и k — некоторое натуральное число. Обозначим M_1^*, M_2^*, ..., M_{k-1}^*, M_k^* точки Аполлония в игре $\Gamma(1, 1; L)$, соответствующие положениям $P(t_1)$ и $E(t_1)$, $P(t_2)$ и $E(t_2)$, ..., $P(t_{k-1})$ и $E(t_{k-1})$, $P(t_k)$ и $E(t_k)$.

Из леммы 13 следует, что

$$
\begin{aligned}
&|E(t_{k-1})E(t_k)| + |E(t_k)M_k^*| \leqslant |E(t_{k-1})M_{k-1}^*|,\\
&|E(t_{k-2})E(t_{k-1})| + |E(t_{k-1})M_{k-1}^*| \leqslant |E(t_{k-2})M_{k-2}^*|,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (69)\\
&|E(t_1)E(t_2)| + |E(t_2)M_2^*| \leqslant |E(t_1)M_1^*|,\\
&|E(0)E(t_1)| + |E(t_1)M_1^*| \leqslant |E(0)M_0^*|,
\end{aligned}
$$

где $M_1 = M_k^*$. Сложив неравенства (69), получаем

$$
\begin{aligned}
s = {} & |E(0)E(t_1)| + |E(t_1)E(t_2)| + \ldots\\
& \ldots + |E(t_{k-1})E(t_k)| + |E(t_k)M_k^*| \leqslant |E(0)M_0^*|, \qquad (70)
\end{aligned}
$$

где s — длина пути, пройденного игроком E на промежутке времени $[0, \theta_1]$, т. е. до момента встречи с P.

Из (70) и (56) следует

$$
\theta_1 = \frac{s}{\sigma} \leqslant \frac{|E(0)M_0^*|}{\sigma} = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{\rho^2 - \sigma^2}} = \theta,
$$

т. е. в рассматриваемом случае встреча P с E произойдет за время, не большее чем θ.

б) Рассмотрим второй случай, т. е. встреча P и E происходит в некоторой точке $M_2 \in L \setminus l$ в момент времени $\theta_1 \leqslant \frac{b-a}{\rho-\sigma}$ (рис. 21). Пусть $E(t_1)$, $E(t_2)$, ..., $E(t_{k-1})$, $E(t_k)$ — вершины ломаной траектории игрока E, где $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k < \theta_1$ и k — некоторое натуральное число. По условию теоремы для начальных положений $P(0) = (0, -b)$ и $E(0) = (0, -a)$ выполнено неравенство (см. (52))

$$
\frac{|E(0)D|}{\sigma} < \frac{|P(0)D|}{\rho}. \qquad (71)
$$

Проверим это неравенство для точек $P(t_1)$ и $E(t_1)$, $P(t_2)$ и $E(t_2)$, ..., $P(t_k)$ и $E(t_k)$. Возможны два случая: 1) существует такой наименьший индекс $1 \leqslant i \leqslant k$, что

$$
\frac{|E(t_i)D_i|}{\sigma} \geqslant \frac{|P(t_i)D_i|}{\rho}, \qquad (72)
$$

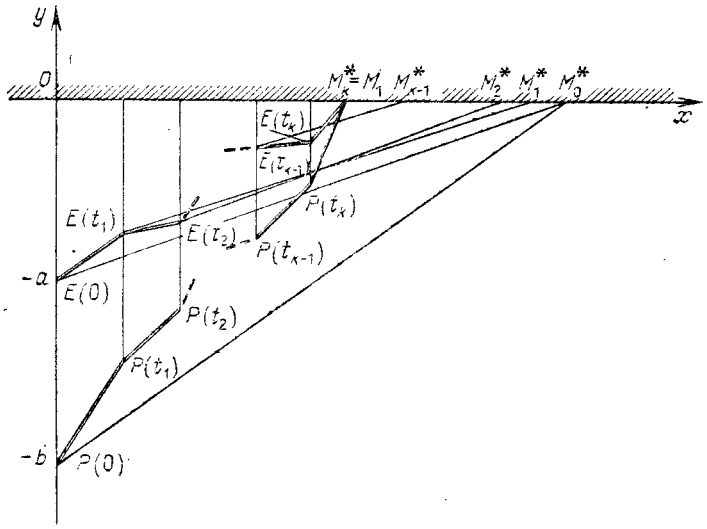

y
0
x
$M_k^* = M_1$
M_{k-1}^*
M_2^*
M_1^*
M_0^*
$E(t_k)$
$E(\tau_{k-1})$
$P(t_k)$
$P(t_{k-1})$
$E(t_1)$
$E(\tau_2)$
$E(0)$
$P(t_2)$
$P(t_1)$
$P(0)$
-a
-b

Рис. 20

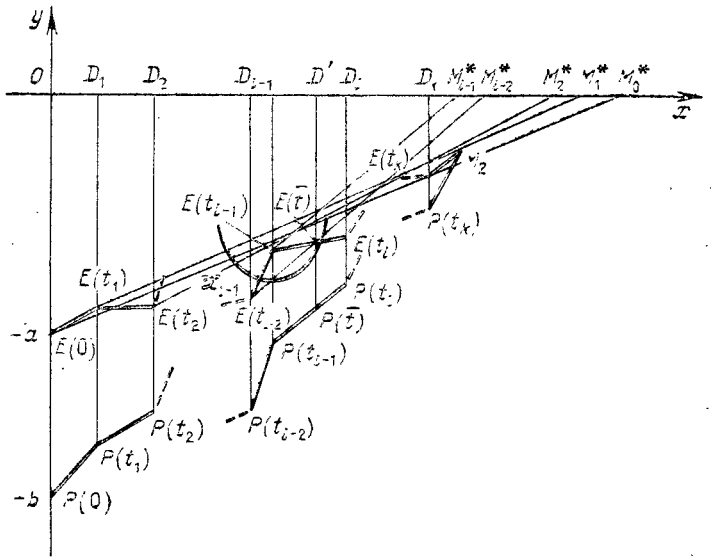

y
0
x
D_1
D_2
D_{i-1}
D'
D_i
D_k
M_{i-1}^*
M_{i-2}^*
M_2^*
M_1^*
M_0^*
$E(t_k)$
$E(t_{i-1})$
$E(\bar{\tau})$
$E(t_i)$
$E(t_1)$
$E(t_2)$
$E(\bar{0})$
$P(t_k)$
$P(t_i)$
$P(\bar{\tau})$
$P(t_{i-1})$
$P(t_{i-2})$
$P(t_2)$
$P(t_1)$
$P(0)$
-a
-b

Рис. 21

где $D_i = [P(t_i),\ E(t_i))\cap l$ (отрезок $[P(t_i),\ E(t_i)]$ перпендикулярен l, так как P использует П-стратегию); 2) для всех индексов i, $1 \leqslant i \leqslant k$,

$$\frac{|E(t_i)D_i|}{\sigma} < \frac{|P(t_i)D_i|}{\rho}. \tag{73}$$

Пусть имеет место первый случай. Из (72) следует (см. лемму 10), что решение игры $\Gamma(1, 1; L)$ из начальных положений $P(t_i)$ и $E(t_i)$ сводится к решению игры $\Gamma(1, 1)$. Поскольку i — наименьший индекс, для которого выполняется (72) (см. (71)), то для положений $P(t_{i-1})$ и $E(t_{i-1})$ выполнено неравенство

$$\frac{|E(t_{i-1})D_{i-1}|}{\sigma} < \frac{|P(t_{i-1})D_{i-1}|}{\rho}, \tag{74}$$

где $D_{i-1} = [P(t_{i-1}),\ E(t_{i-1}))\cap l$ (если $i=1$, то полагаем $t_0 = 0$).

Рассмотрим параболу $\mathscr{L}_{i-1}$ (рис. 21), т. е. границу перехода от игры $\Gamma(1, 1; L)$ к игре $\Gamma(1, 1)$ относительно начальных положений $P(t_{i-1})$ и $E(t_{i-1})$ (см. (57)—(59), (61), (62)). Из (72) и (74) и леммы 12 следует, что существует единственный момент времени $\bar{t}\in(t_{k-1}, t_k]$ такой, что $[E(t_{i-1}),\ E(t_i))\cap\mathscr{L}_{i-1} = E(\bar{t})$, т. е. в момент времени $\bar{t}$ игрок E, перемещаясь вдоль отрезка $[E(t_{i-1}),\ E(t_i)]$, пересекает параболу $\mathscr{L}_{i-1}$. Таким образом, в момент времени $t=\bar{t}$ выполнено равенство (см. (51), (57))

$$\frac{|P(\bar{t})D'|}{\rho} = \frac{|E(\bar{t})D'|}{\sigma}, \tag{75}$$

где $D' = [P(\bar{t}),\ E(\bar{t}))\cap l = (E_1(\bar{t}),\ 0)$, следовательно (см. лемму 10), решение игры $\Gamma(1, 1; L)$ из положений $P(\bar{t})$ и $E(\bar{t})$ сводится к решению игры $\Gamma(1, 1)$. Из теоремы 1 вытекает, что в игре $\Gamma(1, 1)$ из положений $P(\bar{t})$ и $E(\bar{t})$ встреча P с E произойдет за время, не большее чем

$$\frac{|P(\bar{t})E(\bar{t})|}{\rho-\sigma}, \tag{76}$$

Из формул (75) и (76) имеем (см. рис. 21)

$$\frac{|P(\bar{t})E(\bar{t})|}{\rho-\sigma} = \frac{|P(\bar{t})D'| - |E(\bar{t})D'|}{\rho-\sigma} = \frac{|E(\bar{t})D'|}{\sigma}.$$

Отсюда и из (76) получаем, что для длины пути s', пройденного игроком E с момента времени $t=\bar{t}$ до

момента встречи с P, имеет место оценка

$$s' = |E(\bar{t})E(t_i)| + |E(t_i)E(t_{i+1})| + \ldots$$
$$\ldots + |E(t_k)E(\theta_1)| \leqslant |E(\bar{t})D'|. \quad (77)$$

Из леммы 14 следует, что

$$|E(t_{i-1})E(\bar{t})| + |E(\bar{t})D'| \leqslant |E(t_{i-1})M^*_{i-1}|, \quad (78)$$

где M^*_{i-1} — точка Аполлония, соответствующая положениям $P(t_{i-1})$ и $E(t_{i-1})$. Из леммы 13 получаем

$$|E(t_{i-2})E(t_{i-1})| + |E(t_{i-1}),\ M^*_{i-1}| \leqslant |E(t_{i-2})M^*_{i-2}|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|E(t_1)E(t_2)| + |E(t_2)M^*_2| \leqslant |E(t_1)M^*_1|, \quad (79)$$
$$|E(0)E(t_1)| + |E(t_1)M^*_1| \leqslant |E(0)M^*_0|.$$

Выпишем выражение для длины пути s, пройденного игроком E с момента времени $t=0$ до момента встречи с P:

$$s = |E(0)E(t_1)| + |E(t_1)E(t_2)| + \ldots + |E(t_{i-1})E(\bar{t})| +$$
$$+ |E(\bar{t})E(t_i)| + \ldots + |E(t_k)E(\theta_1)|.$$

Теперь, используя неравенства (77), получаем оценку

$$s \leqslant |E(0)E(t_1)| + |E(t_1)E(t_2)| + \ldots$$
$$\ldots + |E(t_{i-1})E(t_i)| + |E(t_i)E(\bar{t})| + |E(\bar{t})D'|.$$

Складывая неравенства (78), (79), получаем

$$|E(0)E(t_1)| + |E(t_1)E(t_2)| + \ldots + |E(t_{i-1})E(t_i)| +$$
$$+ |E(t_i)E(\bar{t})| + |E(\bar{t})D'| \leqslant |E(0)M^*_0|$$

и получаем оценку $s \leqslant |E(0)M^*_0|$, т. е. время до момента встречи

$$\theta_1 \leqslant \frac{s}{\sigma} \leqslant \frac{|E(0)M^*_0|}{\sigma} = \theta.$$

Аналогично показывается, что и во втором случае (см. (73)) существует момент времени $\bar{t} \in (t_k, \theta_1)$ такой, что решение игры $\Gamma(1, 1; L)$ из положений $P(\bar{t})$ и $E(\bar{t})$ сводится к решению игры $\Gamma(1, 1)$. Используя это обстоятельство, мы и в этом случае можем получить оценку (76). Теорема доказана.

2. *Общий случай.*

Теорема 4. *Пусть* $\rho > \sigma > 0$ *и для начальных положений* $P(0)$ *и* $E(0)$ *выполнено неравенство* (52). *Тогда в игре* $\Gamma(1, 1; L)$ *оптимальное время преследования* $\tilde{\theta} = |E(0)M^*|/\sigma$, *где* M^* *— точка Аполлония в игре* $\Gamma(1, 1; L)$ *для положений* $P(0)$ *и* $E(0)$. *Оптимальной для* P *является* П-*стратегия, а оптимальным для* E *— движение по полупрямой* $\overrightarrow{[E(0), M^*)}$.

Доказательство. Пусть игрок E, начиная с момента времени $t = 0$, перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), M^*)}$, тогда из леммы 5 ($M_1 = M^*$) следует, что P не может осуществить встречу с E до момента времени $|E(0)M^*|/\sigma = \tilde{\theta}$.

Пусть теперь игрок E перемещается в полуплоскости L по некоторой ломаной траектории, а игрок P использует П-стратегию. Покажем, что в этом случае встреча P с E произойдет не позже, чем за время $\tilde{\theta}$.

Через точку M^* проведем прямую l_1, перпендикулярную полупрямой $[P(0), E(0))$, и символом L_1 обозначим полуплоскость с границей l_1, содержащую точки $P(0)$ и $E(0)$ (рис. 22). Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; L_1)$ из начальных положений $P(0)$ и $E(0)$. Очевидно, что точка M^* является точкой Аполлония в игре $\Gamma(1, 1; L_1)$ из начальных положений $P(0)$ и $E(0)$ и $[P(0), E(0)) \perp l_1$. При любом способе перемещения игрока E из начального положения $E(0)$ на промежутке времени $[0, \tilde{\theta}]$ в полуплоскости L его траектория содержится в множестве достижимости $H(E(0); \sigma\tilde{\theta}) \cap L$ к моменту времени $\tilde{\theta}$, и имеет место включение

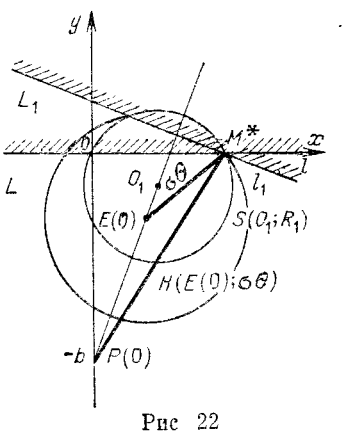


Рис 22

$$H(E(0);\ \sigma\tilde{\theta}) \cap L \subset H(E(0);\ \sigma\tilde{\theta}) \cap L_1.$$

Здесь $H(E(0);\ \sigma\tilde{\theta}) \cap L_1$ — множество достижимости игрока E к моменту времени $\tilde{\theta}$ в полуплоскости L_1.

Поскольку $[P(0), E(0)] \perp l_1$, из теоремы 3 получаем, что в игре $\Gamma(1, 1; L_1)$ при любом способе перемещения игрока на промежутке времени $[0, \tilde{\theta}]$ в полуплоскости L_1 и, в частности, в множестве $H(E(0); \sigma\tilde{\theta}) \cap L_1$, т. е. когда игрок E перемещается в полуплоскости L_1 (действуя как бы в игре $\Gamma(1, 1; L_1)$) встреча P с E произойдет не позже чем за время $\tilde{\theta} = |E(0)M^*|/\sigma$. Следовательно, в игре $\Gamma(1, 1; L)$ из начальных положений $P(0)$ и $E(0)$ встреча P с E произойдет не позже чем за время θ. Теорема доказана.

Упражнения

18. Докажите лемму 10.

19. Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; L)$, где $\rho > \sigma > 0$ и $L = \{(x, y): y \leqslant 0\}$, $P(0) = (0, -b)$, $b > 0$.

Найдите множество всех начальных положений $E(0)$, для которых решение игры $\Gamma(1, 1; L)$ из начальных положений $P(0)$ и $E(0)$ сводится к решению игры $\Gamma(1, 1)$.

20. Докажите лемму 12.

21. Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; L)$. Пусть $\rho > \sigma > 0$, $P(0) \in L$, $E(0) \in L$ и $H(P(0); \rho t) \cap L$, $H(E(0); \sigma t) \cap L$ — множества достижимости игроков P и E к моменту времени t при условии, что игроки не могут покинуть полуплоскость L.

а) Докажите, что существует такой момент времени $t_1 > 0$, что

$$H(E(0); \rho t_1) \cap L \subset H(P(0); \rho t_1) \cap L.$$

б) Обозначим $\bar{t}$ наименьший момент времени t, для которого имеет место предыдущее включение. Докажите, что $\bar{t}$ — оптимальное время преследования в игре $\Gamma(1, 1; L)$ из начальных положений $P(0)$ и $E(0)$.

22. Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; L)$, где $\rho > \sigma > 0$. Зафиксируем начальное положение $P(0)$ игрока P и рассмотрим множество всех начальных положений $E(0) = (x, y)$ игрока E таких, что $[P(0), E(0)) \perp l$ и выполнены неравенства (52), (53). Докажите, что в игре $\Gamma(1, 1; L)$ оптимальное время преследования θ достигает наибольшего значения, когда $E(0) \in l$.

23. Докажите, что в игре $\Gamma(1, 1; L)$ при $\rho < \sigma$ возможно убегание.

24. Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; L)$ из начальных положений $P(0)$, $E(0)$ игроков P и E и $\rho > \sigma > 0$. Пусть по-

лупрямая $[P(0), E(0))$ не перпендикулярна к границе l, для положений $P(0)$ и $E(0)$ выполнено неравенство (52) и M^* — точка Аполлония в игре $\Gamma(1, 1; L)$. Докажите, что в этом случае оптимальной будет также следующая стратегия игрока P: перемещаться вдоль полупрямой $\overrightarrow{[P(0), M^*)}$ до момента времени $\bar{t}$, когда впервые точка $E(t)$ попадает на перпендикуляр $[P(t), D(t)]$ или на полупрямую $[P(t), M^*)$, т. е.

$$E(\bar{t}) \in [P(\bar{t}), M^*] \cup [P(\bar{t}), D(\bar{t})],$$

где $D(\bar{t}) = (P_1(\bar{t}), 0)$ $(P(\bar{t}) = (P_1(\bar{t}), P_2(\bar{t})))$. Начиная с момента времени $t = \bar{t}$ использовать П-стратегию.

§ 6. Преследование на плоскости с несколькими преследователями

Рассмотрим в этом параграфе игру $\Gamma(m, 1)$. Преследование происходит на всей плоскости, и наряд P состоит из m преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_m$, $m \geqslant 2$. Игра начинается в момент времени $t = 0$ из положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$. Буквой K обозначим наименьший выпуклый многоугольник, содержащий точки $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$, а символом K_0 — границу множества K (см. список обозначений).

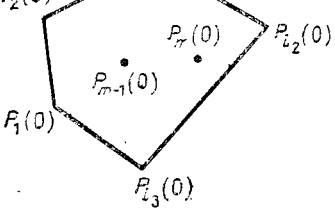


Рис. 23

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что в игре $\Gamma(m, 1)$ для начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ выполнено условие

$$E(0) \notin K \backslash K_0, \qquad (80)$$

т. е. игрок E в начале игры не «окружен» преследователями из наряда P (рис. 23).

Мы будем говорить, что *решение игры* $\Gamma(P_1, P_2; E) = \Gamma(2, 1)$ *сводится к решению игры* $\Gamma(1, 1)$, если оптимальное время преследования в игре $\Gamma(2, 1)$ совпадает с оптимальным временем преследования в одной из игр $\Gamma(P_1, E)$ или $\Gamma(P_2, E)$, т. е. для обеспечения встречи за оптимальное время наличие в наряде $P = \{P_1, P_2\}$ одного из преследователей является излишним.

Будем говорить, что наряд P применяет П-стратегию, если каждый преследователь P_i из наряда P применяет П-стратегию.

Сначала приведем решение игры $\Gamma(2, 1)$, т. е. рассмотрим случай, когда наряд состоит из двух преследователей P_1 и P_2. Легко заметить, что в игре $\Gamma(2, 1)$ для любых начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$ и $E(0)$ выполнено условие (80).

1. *Игра* $\Gamma(2, 1)$. Рассмотрим случай $\rho_1 = \rho_2 = \rho > \sigma$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что в начале игры P_1 и P_2 находятся в положениях $P_1(0) = (-b, 0)$ и $P_2(0) = (b, 0)$ соответственно, где $b > 0$

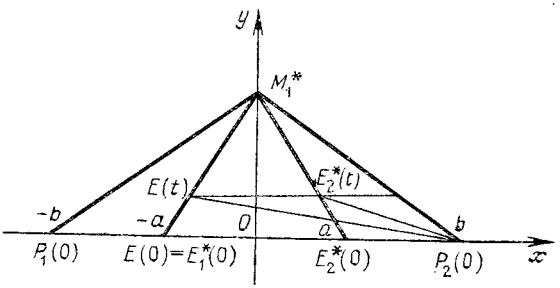


Рис. 24

(рис. 24). (Очевидно, что в случае $b = 0$ решение игры $\Gamma(2, 1)$ сводится к решению игры $\Gamma(1, 1)$.)

а) Пусть игрок E в начале игры находится в положении $E(0) = (-a, 0)$, $a \geqslant 0$, и выполнено неравенство (ср. (52), (53))

$$\frac{a}{\sigma} < \frac{b}{\rho}. \tag{81}$$

Символом M_1^* обозначим точку с координатами

$$M_1^* = \left(0, \sqrt{\frac{b^2\sigma^2 - \rho^2 a^2}{\rho^2 - \sigma^2}}\right). \tag{82}$$

Теорема 5. *Пусть* $\rho_1 = \rho_2 = \rho > \sigma$, *игроки* P_1, P_2 *и* E *в начале игры находятся в положениях* $P_1(0) = (-b, 0)$, $P_2(0) = (b, 0)$ *и* $E(0) = (-a, 0)$ *соответственно и выполнено неравенство* (81). *Тогда в игре* $\Gamma(2, 1)$ *из начальных положений* $P_1(0)$, $P_2(0)$ *и* $E(0)$ *оптимальное время преследования равно* $\theta = \dfrac{|E(0)M_1^*|}{\sigma} = \sqrt{\dfrac{b^2 - a^2}{\rho^2 - \sigma^2}}$ (*ср.* (56))

Оптимальной для наряда $P=\{P_1, P_2\}$ является П-*стратегия, оптимальным для E — движение по полупрямой* $\overrightarrow{[E(0), M_1^*)}$.

Доказательство. Обозначим

$$L_1=\{(x, y): x\leqslant 0\},$$
$$L_2=\{(x, y): x\geqslant 0\}, \qquad (83)$$
$$l=\{(x, y): x=0\}.$$

Введем двух псевдоигроков E_1^* и E_2^*. В начале игры они находятся в положениях $E_1^*(0)=(-a, 0)$ и $E_2^*(0)=(a, 0)$ соответственно, т. е. в момент времени $t=0$ $E_1^*(0)=E(0)$. При $t\geqslant 0$ движения псевдоигроков E_1^* и E_2^* определяются следующим образом. Если игрок E перемещается в L_1, то движение E_1^* совпадает с E, движение E_2^* получается симметричным отображением движения E относительно прямой l; если игрок E, пересекая l, переходит в полуплоскость L_2, то движение E_2^* совпадает с E, а движение E_1^* получается симметричным отображением движения E относительной прямой l. Таким образом, псевдоигрок E_1^* при всех $t\geqslant 0$ перемещается в полуплоскости L_1, а псевдоигрок E_2^* — в L_2 и в каждый момент времени $t\geqslant 0$ положение $E(t)$ игрока E совпадает по крайней мере с одним из положений $E_1^*(t)$ или $E_2^*(t)$ псевдоигроков E_1^* и E_2^*.

Рассмотрим две игры преследования в полуплоскости (см. (23)): $\Gamma(P_1, E_1^*; L_1)$ из начальных положений $P_1(0)=(-b, 0)$ и $E_1^*(0)=(-a, 0)$. $[P_1(0), E_1^*(0))\perp l$; $\Gamma(P_2, E_2^*; L_2)$ из начальных положений $P_2(0)=(b, 0)$ и $E_2^*(0)=(a, 0)$, $[P_2(0), E_2^*(0))\perp l$. Легко убедиться, что точка M_1^* (см. (82)) является точкой Аполлония в обеих играх $\Gamma(P_1, E_1^*; L_1)$ и $\Gamma(P_2, E_2^*; L_2)$.

Пусть игрок E перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), M_1^*)}$; тогда из теоремы 3 следует, что игрок P_1 не может осуществить встречу с $E=E_1^*$, а P_2 — с псевдоигроком E_2^* до момента времени θ. Так как при любом t, $0\leqslant t<\theta$, в $\triangle P(0)E_2^*(t)E(t)$ (см. рис. 24)

$$|P_2(0)E_2^*(t)|<|P_2(0)E(t)|,$$

то игрок P_2 также не может осуществить встречу с E до момента времени θ.

Пусть теперь игрок E перемещается по некоторой ломаной траектории, а наряд P использует П-стратегию. Из теоремы 3 следует, что в играх $\Gamma(P_1, E_1^*; L_1)$, $\Gamma(P_2, E_2^*; L_2)$ из начальных положений $P_1(0)$ и $E_1^*(0)$, $P_2(0)$ и $E_2^*(0)$ соответственно возможно завершение преследования не позже, чем за время θ_1, $\theta_1 \leqslant \theta$, т. е. $P_1(\theta_1) = E_1^*(\theta_1)$ и $P_2(\theta_1) = E_2^*(\theta_1)$. Так как положение игрока E в момент времени $t = \theta_1$ совпадает по крайней мере с одним из положений $E_1^*(\theta_1)$ или $E_2^*(\theta_1)$, то в игре $\Gamma(2, 1)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$ и $E(0)$ возможно завершение преследования не позже, чем за время $\theta_1 \leqslant \theta$. Теорема доказана.

б) Пусть игрок E в начале игры находится в положении $E(0) = (-a, c)$, $a \geqslant 0$, $c > 0$, и выполнено неравенство (80) (рис. 25). Символом M_2^* обозначим точку Аполлония в игре $\Gamma(P_1, E; L_1)$:

$$M_2^* = (0, y^*).$$

Теорема 6. *Пусть* $\rho_1 = \rho_2 = \rho > 0$, *игроки* P_1, P_2 *и* E *в начале игры находятся в положениях* $P_1(0) = (-b, 0)$,

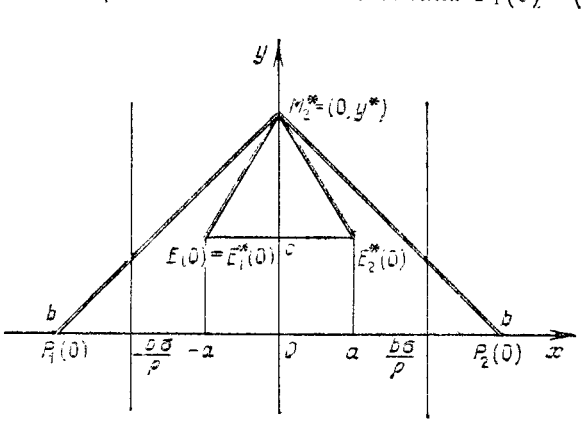


Рис. 25

$P_2(0) = (b, 0)$ *и* $E(0) = (-a, c)$ *соответственно и выполнено неравенство* (80). *Тогда в игре* $\Gamma(2, 1)$ *из начальных положений* $P_1(0)$, $P_2(0)$ *и* $E(0)$ *оптимальное время преследования* $\theta = |E(0)M_2^*|/\sigma$ (*ср. с теоремой* 4). *Оп-*

тимальной для наряда $P = \{P_1, P_2\}$ *является* П-*стратегия,*

оптимальным для E *— движение по полупрямой* $\overrightarrow{[E(0), M_2^*)}$.

Доказательство. Введем двух псевдоигроков E_1^* и E_2^*. В начале игры они находятся в положениях $E_1^*(0) = (-a, c)$ и $E_2^*(0) = (a, c)$ соответственно, т. е. в момент времени $t = 0$ положение E_1^* совпадает с положением E, $E_1^*(0) = E(0)$. При $t \geqslant 0$ движение игроков E_1^* и E_2^* определяется следующим образом. Если игрок E перемещается в L_1 (см. (83)), то движение E_1^* совпадает с E, движение E_2^* получается симметричным отображением движения E относительно прямой l (см. (83)); если игрок E, пересекая l, переходит в полуплоскость L_2, то движение E_2^* совпадает с E, а движение E_1^* получается симметричным отображением движения E относительно прямой l.

Рассмотрим две игры: $\Gamma(P_1, E_1^*; L_1)$ из начальных положений $P_1(0) = (-b, 0)$ и $E_1^*(0) = (-a, c)$; $\Gamma(P_2, E_2^*; L_2)$ из начальных положений $P_2(0) = (b, 0)$ и $E_2^*(0) = (a, c)$. Далее доказательство теоремы 6 может быть продолжено аналогично доказательству теоремы 5 с использованием теоремы 4.

2. *Игра* $\Gamma(m, 1)$. Рассмотрим случай $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_m \geqslant \sigma$. Буквой θ обозначим наименьший момент времени $t \geqslant 0$, для которого выполнено условие (см. упражнение 16)

$$H(E(0), \sigma\theta) \subset \bigcup_{i=1}^{m} H(P_i(0); \rho_i\theta). \tag{84}$$

Теорема 7. *Пусть* $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_m \geqslant \sigma$ *и для начальных положений* $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ *и* $E(0)$ *выполнено условие* (80). *Тогда в игре* $\Gamma(m, 1)$ *оптимальное время преследования равно* θ.

В основе доказательства теоремы 7 лежит следующий геометрический факт.

Лемма 15. *Пусть* K' *— наименьший выпуклый многоугольник, содержащий точки* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, *и*

$$H(A; R) \subset \bigcup_{i=1}^{m} H(A_i; R_i),$$

где $R > 0$, $R_i > 0$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, m$. *Предположим, что точка* A *лежит на границе* K' *или вне ее. Тогда*

существует такое k, $1 \leqslant k \leqslant m$, *что* $H(A;\ R) \subset H(A_k;\ R_k)$, *или существуют* i *и* j, $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m$, *такие, что*

$$H(A;\ R) \subset H(A_i;\ R_i) \cup H(A_j;\ R_j),$$

т. е. круг $H(A;\ R)$ *можно покрыть не более чем двумя кругами из совокупности кругов* $H(A_i,\ R_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Из леммы 15 получаем, что если для некоторого момента времени θ имеет место включение (84), то найдутся два индекса i_1, i_2, $i_1 \neq i_2$, такие, что

$$H(E(0), \sigma\theta) \subset H\left(P_{i_1}(0), \rho_{i_1}\theta\right) \cup H\left(P_{i_2}(0), \rho_{i_2}\theta\right).$$

Однако в этом случае оптимальное время преследования в игре $\Gamma(m,\ 1)$ совпадает с оптимальным временем преследования в игре $\Gamma(2,\ 1)$ между нарядом $\overline{P} = \{P_{i_1}, P_{i_2}\}$, состоящим из двух преследователей P_{i_1}, P_{i_2}, и убегающим E, которое равно θ (см. теорему 6). Это и доказывает теорему 7.

Упражнения

25. Рассмотрим игру $\Gamma(2,\ 1)$, где $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \sigma > 0$. Зафиксируем начальные положения $P_1(0)$ и $P_2(0)$ игроков P_1 и P_2. Найдите множество всех начальных положений $E(0)$ игрока E таких, что решение игры $\Gamma(2,\ 1)$ из положений $P_1(0)$, $P_2(0)$ и $E(0)$ сводится к решению игры $\Gamma(1,\ 1)$.

26. Найдите решение игры $\Gamma(2,\ 1)$ из произвольных начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$ и $E(0)$ в следующих случаях:

а) $\rho_1 = \rho_2 > \sigma > 0$;

б) $\rho_1 > \rho_2 > \sigma > 0$;

в) $\rho_1 > \rho_2 = \sigma > 0$.

27. Докажите, что в игре $\Gamma(2,\ 1)$ при условии $\rho_1 < \rho_2 \leqslant \sigma$ возможно убегание.

28. Рассмотрим игру $\Gamma(2,\ 1)$ из начальных положений $P_1(0) = (-b,\ 0)$, $P_2(0) = (b,\ 0)$ и $E(0) = (-a,\ c)$, где $\rho_1 = \rho_2 > \sigma > 0$ и выполнены неравенства (см. теорему 5)

$$\frac{a}{\sigma} < \frac{b}{\rho}, \quad c > 0,$$

и пусть $M^* = (0,\ y^*)$ (см. рис. 25).

Докажите, что в этом случае следующая стратегия наряда $P = \{P_1,\ P_2\}$ также будет оптимальной: игроки P_1 и P_2 перемещаются по полупрямым $[P_1(0),\ M^*)$ и

$[P_2(0), M^*)$ соответственно до момента времени $\bar{t}$, когда впервые точка $E(t)$ попадает на границу треугольника $P_1(t)M^*P_2(t)$, т. е.

$$E(\bar{t}) \in [P_1(\bar{t})P_2(\bar{t})] \cup [P_1(\bar{t})M^*] \cup [P_2(\bar{t})M^*],$$

далее, начиная с момента времени $t = \bar{t}$, наряд $P = \{P_1, P_2\}$ использует П-стратегию.

29. Докажите лемму 15 в случае, когда $m = 3$, $R_i > R$, $i = 1, 2, 3$.

30. Докажите теорему 7 в случае, когда $m = 3$, $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \sigma$ и $E(0) \notin K$, где K — треугольник с вершинами в точках $P_1(0)$, $P_2(0)$, $P_3(0)$.

ГЛАВА III

ИГРА С «ЛИНИЕЙ ЖИЗНИ»

§ 7. Преследование с одним преследователем

В этом параграфе мы найдем решение игры $G(1, 1; S)$ с «линией жизни» в случае, когда S — выпуклое множество на плоскости с границей l. Разберем подробно случай, когда множество S представляет собой полуплоскость. Напомним, что в игре $G(1, 1, S)$ цель игрока P состоит в том, чтобы не допустить достижения границы — линии жизни l — игроком E до встречи с P. Цель убегающего E — достижение линии жизни l, избегая при этом встречи с P до момента ее достижения. По условиям игры игрок P в процессе преследования не может покинуть множества S.

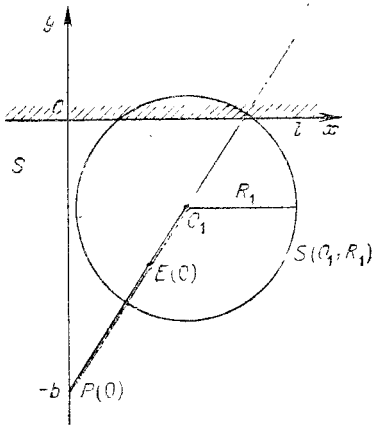


Рис. 26

1. *Случай полуплоскости.* Выберем систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс совпадала с границей l полуплоскости, а множество S представлялось в виде (рис. 26)

$$S = \{(x, y): y \leqslant 0\},\ P(0) = (0, -b) \in S,\quad E(0) \in S,\quad b > 0.$$

1а). Рассмотрим подслучай $\rho > \sigma > 0$.

Теорема 8. *Пусть $\rho > \sigma > 0$. Тогда в игре $G(1, 1; S)$ невозможно выживание игрока E в S тогда и только тогда, когда круг Аполлония $H(O_1; R_1)$ относительно начальных положений игроков $P(0)$, $E(0)$ не пересекается с границей l полуплоскости S.*

Доказательство. Предположим, что $H(O_1, R_1) \cap l = \varnothing$, и пусть $E(t)$ — некоторая ломаная траектория E из начального состояния $E(0) \in S$. Тогда согласно теореме 2 при использовании игроком P П-стратегии точка встречи P с E содержится в круге Аполлония $H(O_1, R_1)$, а поскольку $H(O_1, R_1) \cap l = \varnothing$, то E не может достичь границы l множества S до его встречи с преследователем P. Покажем, что в этом случае траектория $P(t)$ игрока P не покинет множества S. Траектория $E(t)$ является ломаной с конечным числом вершин. Обозначим эти вершины $E(0)$, $E(t_1)$, ..., $E(t_k)$, ..., $E(t_n)$, где $t = t_n$ — момент встречи. Поскольку $H(O_1, R_1) \cap l = \varnothing$, то все вершины $E(t_k) \in S$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $P(0)$, $P(t_1)$, ..., $P(t_k)$, ..., $P(t_n)$ — вершины ломаной траектории P, реализовавшиеся при использовании им П-стратегии и при условии движения E по траектории $E(t)$. Количества вершин на ломаных траекториях $E(t)$, $P(t)$ совпадают, и эти вершины проходятся игроками в одни и те же моменты времени t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим полупрямую $[E(0), E(t_1))$ и пусть M_1 — точка ее пересечения с окружностью Аполлония $S(O_1, R_1)$. Тогда по определению П-стратегии имеем, что $P(t_1)$ принадлежит отрезку $[P(0), M_1]$, и поскольку $P(0) \in S$, $M_1 \in S$, то из выпуклости S получаем, что $P(t_1) \in S$. Пусть теперь $H(O_2; R_2)$ — круг Аполлония относительно начальных положений $E(t_1)$, $P(t_1)$. Согласно теореме 2 $H(O_2; R_2) \subset H(O_1; R_1) \subset S$. Рассмотрим полупрямую $[E(t_1), E(t_2))$ и пусть M_2 — точка ее пересечения с окружностью Аполлония $S(O_2; R_2)$ относительно положений $P(t_1)$, $E(t_1)$. Тогда по определению П-стратегии $P(t_2)$ принадлежит отрезку $[P(t_1), M_2]$, и поскольку $P(t_1) \in S$, $M_2 \in S$, то из выпуклости S получаем, что $P(t_2) \in S$ и т. д. Предположим, что $P(t_k) \in S$. Рассмотрим теперь круг Аполлония $H(O_{k+1}, R_{k+1})$ относительно положений $E(t_k)$, $P(t_k)$. Согласно теореме 2 $H(O_{k+1}, R_{k+1}) \subset H(O_k, R_k) \subset \ldots \subset H(O_2, R_2) \subset H(O_1, R_1) \subset S$. Рассмотрим полупрямую $[E(t_k), E(t_{k+1}))$ и пусть M_{k+1} — точка ее пересечения с окружностью Аполлония $S(O_{k+1}; R_{k+1})$ относительно местоположений $P(t_k)$, $E(t_k)$. Поскольку $P(t_{k+1})$ принадлежит отрезку $[P(t_{k+1}), M_{k+1}]$ и $P(t_k) \in S$, $M_{k+1} \in S$, то из выпуклости S получаем, что $P(t_{k+1}) \in S$. Таким образом, мы показали, что все вершины $P(0)$, $P(t_1)$, ..., $P(t_k)$, ..., $P(t_n)$ ломаной $P(t)$ принадлежит S, тогда из выпуклости S получаем, что и ломаная траектория $P(t)$ принадлежит S при $0 \leqslant t \leqslant t_n$.

Пусть теперь $H(O_1, R_1) \cap l \neq \varnothing$ и пусть $M \in H(O_1, R_1) \cap l$. Предпишем игроку E движение из точки $E(0)$ по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), M)}$. Пусть M_1 — точка пересечения полупрямой $\overrightarrow{[E(0), M)}$ с окружностью Аполлония $S(O_1; R_1)$. Поскольку $M \in [E(0), M_1)$ и S выпукло, то или $M_1 \in l$, или $M_1 \notin S$. Но M_1 есть точка встречи при условии, что игрок E движется по полупрямой $\overrightarrow{[E(0) M)}$ и игрок P использует П-стратегию. При этом движение игрока P прямолинейно, т. е. игрок P перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[P(0, M_1)}$ и при любом способе движения P встреча с E до достижения им точки M невозможна (лемма 5). Следовательно, в этом случае у игрока P не существует способа преследования, который бы мог обеспечить встречу с E до момента достижения им «линии жизни» точки $M \in l$ — границы множества S. Теорема доказана.

1б). Подслучай $\rho = \sigma > 0$.

Теорема 9. *Пусть* $\rho = \delta > 0$. *В игре* $G(1, 1; S)$ *всегда* E *может достичь границы* l *множества* S *до его поимки преследователем, кроме случая, когда полупрямая* $[E(0), P(0))$ *пересекает* l *и перпендикулярна* l.

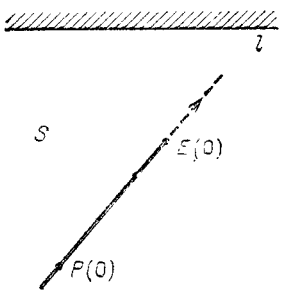


Рис. 27

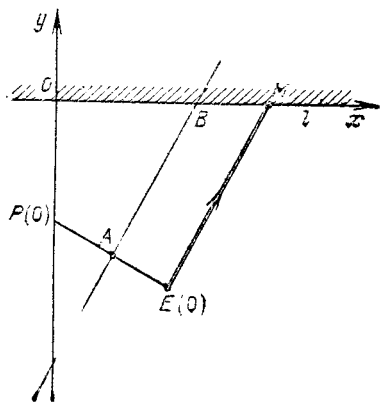


Рис. 28

Доказательство. Если полупрямая $[E(0), P(0))$ не пересекает l и не параллельна l, то E, двигаясь по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), E(0))}$, очевидно, достигает l, оставаясь в процессе движения от игрока P на расстоянии, не меньшем чем $|P(0)E(0)|$ (рис. 27).

Рассмотрим теперь случай, когда полупрямая $[E(0), P(0))$ параллельна l или пересекается с l, но не перпендикулярна l. В этом случае E всегда может достичь l, двигаясь в направлении к границе по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), H)}$ параллельно перпендикуляру, проведенному к отрезку $[E(0), P(0))$ (рис. 28).

Если теперь полупрямая $[E(0), P(0))$ перпендикулярна l и пересекается с l, то при любом движении E по ломаной $E(t)$ с вершинами в точках $E(t_1), \ldots, E(t_k), \ldots$ игрок P, используя П-стратегию, движется по ломаной $P(t)$ с вершинами в точках $P(t_1), \ldots, P(t_k), \ldots$, причем полупрямые $[E(t_k), P(t_k))$ всегда перпендикулярны границе l и для длин отрезков $[E(t_k), P(t_k)]$ имеет место оценка

$$|E(t_k)P(t_k)| \leqslant |E(0)P(0)|$$

для всех k, $k = 1, 2, \ldots$ (расстояние $|E(t)P(t)|$ не возрастает в процессе движения). Кроме того, из свойства П-стратегии (параллельность отрезка $[E(t), P(t)]$ при

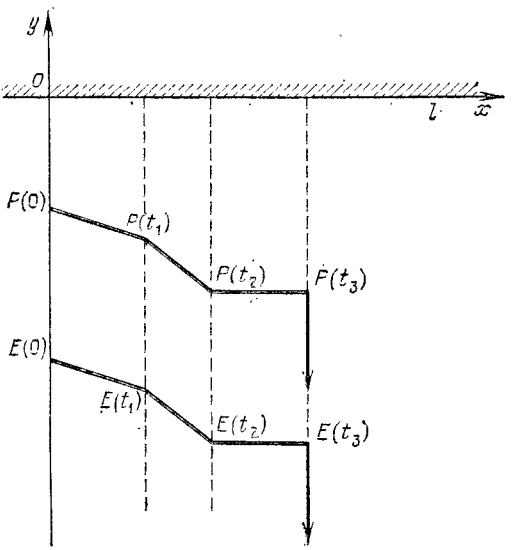


Рис. 29

всех $t \geqslant 0$ отрезку $[E(0), P(0)]$) следует, что полупрямые $[E(t), P(t))$ пересекаются с l и будут перпендикулярны l при всех t. Следовательно, E не сможет достичь l до его встречи с P (рис. 29).

Однако игрок E, двигаясь по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), E(0)]}$, может гарантировать отсутствие встречи с P в течение сколь угодно большого отрезка времени. Теорема доказана.

2. *Случай круга.*

Теорема 10. *Пусть* $\rho > \delta > 0$ *и* S *— круг. В этом случае в игре* $G(1, 1; S)$ *невозможно выживание игрока* E *в* S *тогда и только тогда, когда круг Аполлония* $H(O_1, R_1)$ *относительно начальных положений* $P(0)$, $E(0)$ *не пересекается с границей* l *круга* S.

Доказательство проводится вполне аналогично доказательству теоремы 8. Если $H(O_1, R_1) \cap l = \varnothing$, то для любого движения $E(t)$ игрока E, исходящего из начального положения $E(0) \in S$ при использовании игроком P П-стратегии, точка встречи P с E содержится в круге Аполлония $H(O_1, R_1)$, т. е. не может достичь границы l круга S до его встречи с преследователем P. Остается лишь показать, что в этом случае траектория $P(t)$ игрока P не покидает множества S. Это легко установить, используя выпуклость круга S и дословно повторяя соответствующие рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 8. Аналогично получаем, что E всегда может избежать встречи в S при $H(O_1, R_1) \cap l \neq \varnothing$.

Теорема 11. *Пусть* $\rho = \delta > 0$. *В* $G(1, 1; S)$ *из всех начальных состояний* $E(0)$, $P(0)$, $|E(0), P(0)| > 0$, *возможно выживание.*

Доказательство. Очевидно, что для выживания игроку E достаточно двигаться по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), E(0)]}$ до момента достижения границы l круга S.

Упражнения

31. Пусть $\rho \geqslant \sigma > 0$, $E(t)$ — некоторая ломаная траектория E из начального положения $E(0)$ с вершинами $E(t_1)$, $E(t_2)$, ..., $E(t_k)$, ..., $E(t_n)$ и игрок P использует П-стратегию. Докажите, что в этом случае P будет перемещаться по ломаной траектории, исходящей из начального состояния $P(0)$ с тем же числом вершин, расположенных в точках $P(t_1)$, $P(t_2)$, ..., $P(t_k)$, ..., $P(t_n)$, т. е. изломы траекторий игроков P и E происходят в одни и те же моменты времени.

32. Пусть $\rho > \sigma > 0$ и S — произвольное выпуклое множество на плоскости. Покажите, что в игре $G(1, 1; S)$

невозможно выживание тогда и только тогда, когда круг Аполлония $H(O_1; R_1)$ относительно положений $P(0)$, $E(0)$ не пересекается с границей l множества S.

33. Рассмотрим игру $G(1, 1; S)$, $\rho > \sigma > 0$, при дополнительном предположении, что игрок P в процессе движения может пересекать границу l множества S. Выведите необходимые и достаточные условия невыживания игрока E в S в случае, когда S — произвольное (не обязательно выпуклое) множество на плоскости.

34. Рассмотрим игру $G(1, 1; S)$, $\rho = \sigma > 0$, в случае, когда S — произвольное ограниченное выпуклое множество на плоскости. Докажите, что если $|P(0)E(0)| > 0$, то в этом случае всегда возможно выживание.

35. Пусть $\rho > \sigma > 0$, S — полуплоскость с границей l и в игре $G(1, 1; S)$ из начальных положений $P(0)$, $E(0)$ выживание невозможно (т. е. круг Аполлония $H(O_1; R_1)$ относительно нескольких положений $P(0)$, $E(0)$ не пересекается с l). Рассмотрим модификацию $G'(1, 1; S)$ игры $G(1, 1; S)$, в которой целью игрока E является максимальное сближение с границей l множества S, а целью игрока P является встреча с E на возможно большем удалении от границы. Найдите оптимальный способ поведения игроков P и E в игре $G'(1, 1; S)$.

36. Найдите оптимальный способ поведения игроков P и E в игре $G'(1, 1; S)$ в случае, когда $\rho > \sigma > 0$ и S — произвольное выпуклое множество на плоскости.

§ 8. Построение зон убегания и зон встречи

Продолжим исследование игры $G(1, 1; S)$ с «линией жизни» в выпуклом множестве S на плоскости.

Положим $\rho/\sigma = w$, $w \geqslant 1$. Множество начальных положений $P(0) \in S$, $E(0) \in S$ игроков P и E, при которых возможно выживание в игре $G(1, 1; S)$, называется *зоной убегания*. Зону убегания для фиксированных S и w мы будем обозначать $\text{УЗ}(S; w)$. Аналогично, множество начальных положений $P(0) \in S$, $E(0) \in S$ таких, что в игре $G(1, 1; S)$ выживание невозможно, называется *зоной встречи*. Зону встречи для фиксированных S и w мы будем обозначать через $\text{ВЗ}(S; w)$.

Очевидно, что множества $\text{УЗ}(S; w)$ и $\text{ВЗ}(S; w)$ не пересекаются между собой, а объединение этих множеств (при $w > 1$) совпадает с множеством всевозможных пар $\{P(0), E(0)\}$, где $P(0) \in S$, $E(0) \in S$.

Теорема 12. *Пусть заданы игры* $G(1, 1; S_1)$, $G(1, 1; S_2)$, ..., $G(1, 1; S_n)$ *с линией жизни, где* $S_1, S_2, \ldots$ ..., S_n — *выпуклые множества на плоскости,* n — *некоторое натуральное число, и игра* $G\left(1, 1; \bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i\right)$; тогда

$$\text{ВЗ}\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i; w\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \text{ВЗ}(S_i; w).$$

Доказательство. Заметим, что пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$ выпуклых множеств S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, является выпуклым и поэтому определение игры с линией жизни в множестве $\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$ корректно.

Пусть начальные положения $\{P(0), E(0)\} \in \text{ВЗ}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i; w\right)$. Это означает, что если преследование начинается из положений $P(0)$, $E(0)$, то игрок E не может достичь границы множества $\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$ до его встречи с преследователем P; так как $S_i \supset \bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$, то он тем более не может этого сделать в игре $G(1, 1; S_i)$ и, следовательно, $\{P(0), E(0)\} \in \text{ВЗ}(S_i; w)$ при $i = 1, \ldots, n$, т. е.

$$\{P(0), E(0)\} \in \bigcap_{i=1}^{n} \text{ВЗ}(S_i; w),$$

и мы получаем, что

$$\text{ВЗ}\left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i; w\right) \supset \bigcap_{i=1}^{n} \text{ВЗ}(S_i; w).$$

Пусть теперь $\{P(0), E(0)\} \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \text{ВЗ}(S_i; w)$. Это означает, что игрок E не может достичь границы ни одного из множеств S_i до его встречи с преследователем в S_i, т. е. он не может достичь и границы множества $\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$ до его встречи с P в этом множестве, а поэтому $\{P(0), E(0)\} \in \text{ВЗ}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i; w\right)$ и $\text{ВЗ}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i; w\right) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \text{ВЗ}(S_i; w)$. Теорема доказана.

Теорема 13. *Пусть* $w_1 = \rho_1/\sigma_1 > w_2 = \rho_2/\sigma_2$; *тогда*

$$\text{ВЗ}(S;\ w_1) \supset \text{ВЗ}(S;\ w_2).$$

Доказательство. Пусть $\{P(0),\ E(0)\} \in \text{ВЗ}(S;\ w_2)$. Тогда круг Аполлония $H(O_2;\ R_2)$ относительно начальных положений $P(0)$, $E(0)$, рассчитанный для скоростей ρ_2, σ_2 игроков P и E, содержится в S. При этом его радиус

$$R_2 = \frac{|P(0)\,E(0)|}{\rho_2/\sigma_2 - \sigma_2/\rho_2}.$$

Радиус круга Аполлония $H(O_1;\ R_1)$ относительно тех же начальных положений $P(0)$, $E(0)$, но для скоростей ρ_1, σ_1 игроков P, E

$$R_1 = \frac{|P(0)\,E(0)|}{\rho_1/\sigma_1 - \sigma_1/\rho_1}.$$

Центры кругов $H(O_1;\ R_1)$ и $H(O_2;\ R_2)$ расположены на одной прямой $(P(0),\ E(0))$. Обозначим символами A_1, B_1 точки пересечения прямой $(P(0),\ E(0))$ с окружностью Аполлония $S(O_1;\ R_1)$ и символами A_2, B_2 — точки

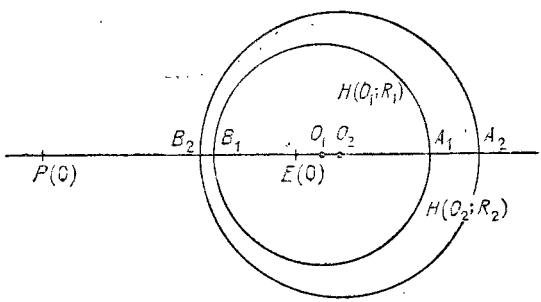


Рис. 30

пересечения прямой $(P(0),\ E(0))$ с окружностью Аполлония $S(O_2;\ R_2)$ (рис. 30). Тогда имеем

$$\rho\,|E(0)\,B_1| = \frac{|E(0)\,P(0)|\,\sigma_1}{\rho_1 + \sigma_1} < \rho\,|E(0)\,B_2| = \frac{|E(0)\,P(0)|\,\sigma_2}{\rho_2 + \sigma_2},$$

$$\rho\,|P(0)\,A_1| = \frac{|E(0),\,P(0)|\,\rho_1}{\rho_1 - \sigma_1} < \frac{|E(0)\,P(0)|\,\rho_2}{\rho_2 - \sigma_2}$$

(см. (10), (11)) и $R_2 > R_1$. Следовательно, $H(O_1;\ R_1) \subset H(O_2;\ R_2)$, и поскольку $H(O_2;\ R_2) \subset S$ ($\{P(0),\ E(0)\} \in \text{ВЗ}(S;\ w_2)$), то $H(O_1;\ R_1) \subset S$, т. е. $\{P(0),\ E(0)\} \in \text{ВЗ}(S_1;\ w_1)$. Теорема доказана.

Определим вид зоны встречи $B3(S;\ w)$ для случая полуплоскости. Зафиксируем точку $P(0)$ и рассмотрим множество всех возможных начальных положений $E(0)$, для которых P может гарантировать встречу с игроком E в S. Это множество будем обозначать $B3_{P(0)}(S;\ w)$. Построим множество $B3_{P(0)}(S;\ w)$ для случая, когда S — полуплоскость (рис. 31).

Беря за центр точку $P(0)=(0,\ -b)$, выведем в полярных координатах уравнение геометрического места тех

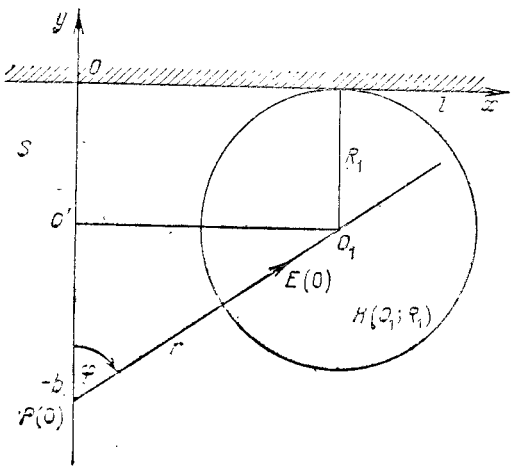


Рис. 31

точек $E(0)=(r,\ \varphi)$ (см. список обозначений), для которых встреча происходит на границе l множества S. Это множество совпадает с множеством тех начальных состояний $E(0)$, для которых круг Аполлония $H(O_1;\ R_1)$ касается границы l множества S. Из формул (11), (12) имеем:

$$R_1 = \frac{|P(0)\,E(0)|\,\rho\sigma}{\rho^2-\sigma^2} = \frac{r\rho\sigma}{\rho^2-\sigma^2},$$

$$|P(0)\,O_1| = \frac{r\rho^2}{\rho^2-\sigma^2},$$

где $r=|P(0)E(0)|$. Тогда из треугольника $P(0)O'O_1$ (рис. 31) получаем соотношение

$$b = \frac{r\rho\sigma}{\rho^2-\sigma^2} + \frac{r\rho^2}{\rho^2-\sigma^2}\cos\varphi. \qquad (85)$$

Если начальное положение $E(0)$ игрока E таково, что его полярные координаты (r, φ) удовлетворяют неравенству

$$\frac{r\rho\sigma}{\rho^2-\sigma^2}+\frac{r\rho^2}{\rho^2-\sigma^2}\cos\varphi-b\geqslant 0, \tag{86}$$

то круг Аполлония $H(O_1; R_1)$ относительно начальных положений $P(0)$, $E(0)$ пересекает границу l области S и игрок E может избежать встречи в S. В то же время из любой другой начальной точки $E(0)$ (при фиксированном начальном положении $P(0)$) игрок E не может достичь границы l области S до его встречи с P. Таким образом, неравенство (86) определяет множество $\text{УЗ}_{P(0)}(S; w)$, а противоположное неравенство — множество $\text{ВЗ}_{P(0)}(S; w)$.

Уравнение границы (85) множества $\text{УЗ}_{P(0)}(S; w)$ можно записать в виде

$$b=r\left(\frac{w}{w^2-1}+\frac{w^2}{w^2-1}\cos\varphi\right)$$

или

$$r=\frac{bw^{-1}(w^2-1)}{1+w\cos\varphi}. \tag{87}$$

Поскольку $w=\rho/\sigma>1$, уравнение (87) представляет собой уравнение ветви гиперболы с фокусом в точке $P(0)$, симметричной относительно прямой $[P(0), O)$.

Проведем построение множества $\text{ВЗ}_{E(0)}(S; w)$ для случая полуплоскости (рис. 32). Беря за центр точку $E(0)=(0, c)$, выведем в полярных координатах уравнение геометрического места тех точек $P(0)=(r, \varphi)$, для которых встреча происходит на границе l множества S. Это множество совпадает с множеством тех начальных положений $P(0)$, для которых круг Аполлония $H(O_1; R_1)$ касается границы l множества S. Длина отрезка $[E(0), O_1]$ равна (см. (11)) $r\sigma^2/(\rho^2-\sigma^2)$. Из треугольника

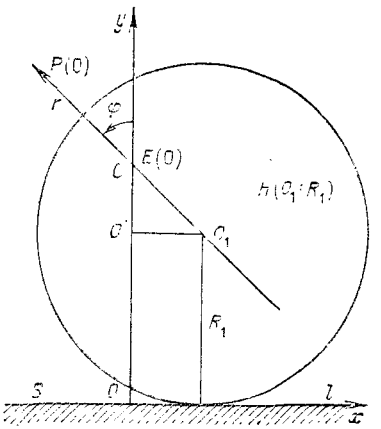


Рис. 32

$E(0)O_1O'$ (рис. 32) получаем соотношение

$$c = \frac{r\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2}\cos\varphi + \frac{r\rho\sigma}{\rho^2 - \sigma^2}. \qquad (88)$$

Если начальное положение $P(0)$ игрока P таково, что его полярные координаты (r, φ) удовлетворяют неравенству

$$\frac{r\rho\sigma}{\rho^2 - \sigma^2} + \frac{r\sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2}\cos\varphi - c \geqslant 0, \qquad (89)$$

то круг Аполлония $H(O_1; R_1)$ относительно начальных положений $P(0)$, $E(0)$ пересекает границу l области S, и E может избежать встречи в S. В то же время из любого другого начального положения $P(0)$ (при фиксированном начальном положении $E(0)$) P может гарантировать встречу с E до его достижения границы l множества S. Таким образом, неравенство (89) определяет множество $\text{УЗ}_{E(0)}(S; w)$, а противоположное неравенство определяет множество $\text{ВЗ}_{P(0)}(S; w)$.

Уравнение границы (88) множества $\text{УЗ}_{E(0)}(S; w)$ можно записать в виде

$$c = r\left(\frac{w}{w^2 - 1} + \frac{1}{w^2 - 1}\cos\varphi\right)$$

или

$$r = \frac{cw^{-1}(w^2 - 1)}{1 + \frac{1}{w}\cos\varphi}.$$

Поскольку $0 < 1/w = \sigma/\rho < 1$, то в полярных координатах это уравнение представляет собой уравнение эллипса с фокусом в точке $E(0)$ и с центром в точке A.

Упражнения

37. Пусть $\rho > \sigma > 0$ и S — полуплоскость. Выведите уравнение границы множества $\text{УЗ}_{P(0)}(S; w)$ в декартовых координатах.

38. Пусть $\rho > \sigma > 0$ и S — полуплоскость. Выведите уравнение границы множества $\text{УЗ}_{E(0)}(S; w)$ в декартовых координатах.

39. Пусть $\rho > \sigma > 0$. В игре $G(1, 1; S)$ постройте множество $\text{УЗ}_{P(0)}(S; w)$ в случае, когда множество S является квадратом, выпуклым многоугольником, кругом. Для

этих же случаев произведите построение множества $УЗ_{E(0)}(S; w)$.

40. Пусть в игре $G(1, 1; S)$ начальные положения $P(0)$, $E(0)$ игроков P и E принадлежат зоне убегания, т. е. $\{P(0), E(0)\} \in УЗ(S; w)$. Докажите, что существует такая полупрямая $\overrightarrow{[E(0), M)}$, что при движении игрока E вдоль нее и при любом способе движения $P(t)$ игрока P пара точек $\{P(t), E(t)\}$ будет всегда принадлежать зоне убегания до момента достижения игроком E границы l множества S, т. е. у игрока P нет способа движения, обеспечивающего выход пары $\{P(t), E(t)\}$ из множества $УЗ(S; w)$.

41. Пусть в игре $G(1, 1; S)$ начальные положения $P(0)$, $E(0)$ игроков P и E принадлежат зоне встречи, т. е. $\{P(0), E(0)\} \in ВЗ(S; w)$. Докажите, что при использовании игроком P П-стратегии и при любом способе движения игрока E пара точек $\{P(t), E(t)\}$ будет принадлежать зоне встречи до момента встречи игроков P и E, т. е. у игрока E нет способа движения, обеспечивающего выход пары $\{P(t), E(t)\}$ из множества $ВЗ(S; w)$.

§ 9. Преследование с несколькими преследователями

В этом параграфе мы исследуем игру $G(m, 1; S)$ преследования с линией жизни с нарядом преследователей $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, состоящим из m преследующих игроков и одним убегающим E. Задача наряда P — осуществить встречу с E в полуплоскости S хотя бы одним из его участников P_i, $i = 1, \ldots, m$, до момента достижения игроком E границы l полуплоскости S. Цель игрока E противоположна. Здесь мы будем предполагать, что участники наряда P могут в процессе преследования покидать множество S.

1. *Игра* $G(2, 1; S)$. Здесь S — полуплоскость с границей l и $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \sigma > 0$.

Теорема 14. *Пусть* $\rho_1 \geqslant \rho_2 > \sigma > 0$. *В игре* $G(2, 1; S)$ *из начальных положений* $P_1(0)$, $P_2(0)$, $E(0)$ *выживание невозможно тогда и только тогда, когда пересечение кругов Аполлония* $H(O_1; R_1) \cap H(O_2; R_2)$, *соответствующих начальным положениям* $P_1(0)$, $E(0)$ *и* $P_2(0)$, $E(0)$ *соответственно, не пересекается с границей* l *множества* S.

Доказательство. Пусть

$$H(O_1; R_1) \cap H(O_2; R_2) \cap l = \emptyset,$$

т. е. не существует общих точек между границей l полуплоскости S и пересечением кругов Аполлония $H(O_1; R_1) \cap$ $\cap H(O_2; R_2)$. Пусть $E(t)$ — некоторая ломаная траектория E из начального положения $E(0)$ и наряд P использует П-стратегию. Обозначим $E(t_{P_1}), E(t_{P_2})$ соответствующие точки встречи игроков P_1 и P_2 с E. Пусть для определенности $t_{P_1} \leqslant t_{P_2}$; тогда встреча осуществится в S в том случае, когда $E(t_{P_1}) \in S \setminus l$. Из теоремы 2 имеем, что точка встречи $E(t_{P_1})$ при использовании П-стратегии игроком P_1 принадлежит кругу Аполлония $H(O_1; R_1)$, т. е. $E(t_{P_1}) \in H(O_1; R_1)$. Она также принадлежит кругу $H(O_2; R_2)$, так как в противном случае игрок P_2 при использовании П-стратегии мог бы осуществить встречу раньше, чем за время t_{P_1}, но $t_{P_2} \geqslant t_{P_1}$. ($E$ не может выйти за пределы круга Аполлония, избежав встречи, если P_2 использует П-стратегию.) Таким образом, точка встречи $E(t_{P_1}) \in H(O_1; R_1) \cap H(O_2; R_2)$. Аналогичное включение имеет место и при $t_{P_1} > t_{P_2}$. Обозначим буквой M ту из точек $E(t_{P_1})$ и $E(t_{P_2})$, для которой значение времени встречи минимально (т. е. точку с минимальной величиной t_{P_i}, $i = 1, 2$). Точку M назовем точкой встречи. Таким образом, мы показали, что множество точек встречи при использовании П-стратегии нарядом $P = \{P_1, P_2\}$ принадлежит пересечению кругов Аполлония $H(O_1; R_1) \cap H(O_2; R_2)$. Следовательно, если множество $H(O_1; R_1) \cap H(O_2; R_2)$ не пересекается с l, то E не может избежать встречи в S. Покажем теперь, что если $H(O_1; R_1) \cap H(O_2; R_2)$ пересекается с границей l, то игрок E всегда может избежать встречи. Действительно, если пересечение с l непусто, то существует точка $M \in l$ одновременно лежащая на границе множества $H(O_1; R_1) \cap$ $\cap H(O_2; R_2)$ (рис. 33).

Пусть для определенности $M \in S(O_1; R_1)$. Кроме того, поскольку $M \in H(O_1; R_1) \cap H(O_2; R_2)$, то $M \in H(O_2; R_2)$. Рассмотрим прямолинейное движение E из начального положения $E(0)$ в точку M. При таком движении встреча E с P_1 происходит в точке M на границе l (если P_1 использует П-стратегию) и игрок P_1 не может осуществить встречу с E до достижения игроком E точки M (лемма 5). Покажем, что игрок P_2 также не может осуществить встречу с E до достижения им точки M. Здесь возможны два случая: точка M лежит на границе круга Аполлония

$H(O_2; R_2)$ и точка M является внутренней точкой круга $H(O_2; R_2)$. В первом случае M принадлежит окружности Аполлония $S(O_2; R_2)$ и согласно лемме 5 встреча с E до достижения точки M невозможна. Пусть теперь M является внутренней точкой круга Аполлония $H(O_2; R_2)$;

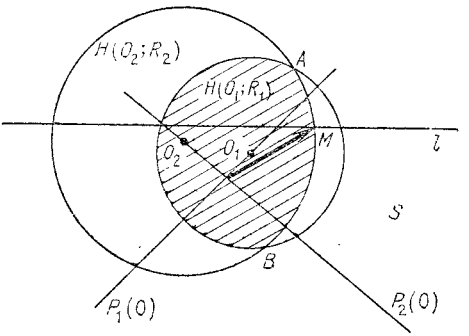


Рис. 33

тогда согласно лемме 5 встреча в любой точке отрезка $[E(0), M]$ с E невозможна.

Таким образом, игрок E, перемещаясь из $E(0)$ в M, гарантирует выживание в S. Теорема доказана.

2. *Игра* $G(m, 1; S)$. Рассмотрим случай, когда S полуплоскость.

Теорема 15. *Пусть* $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_m > \sigma$ *и* S *— полуплоскость с границей* l. *Тогда в игре* $G(m, 1; S)$ *невозможно выживание в том и только том случае, когда пересечение кругов Аполлония* $\bigcap_{i=1}^{m} H(O_i; R_i)$ *относительно начальных состояний* $P_i(0)$, $E(0)$, $i = 1, \ldots, m$, *не пересекается с границей* l *множества* S.

Доказательство. Дословно повторяя доказательство теоремы 14 (в п. 1), можно убедиться в том, что множество точек встречи при использовании П-стратегии наряду $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ принадлежит пересечению кругов Аполлония $\bigcap_{i=1}^{m} H(O_i; R_i)$. Таким образом, если $\bigcap_{i=1}^{m} H(O_i; R_i)$ не пересекается с l, то выживание невозможно. Пусть теперь множество $\bigcap_{i=1}^{m} H(O_i; R_i)$ пересека-

ется с l, тогда, повторяя рассуждения второй части доказательства теоремы 14 и используя выпуклость множества $\bigcap_{i=1}^{m} H(O_i; R_i)$ как пересечения выпуклых множеств (кругов Аполлония), приходим к выводу, что в этом случае E всегда может обеспечить выживание, двигаясь из $E(0)$ прямолинейно в одну из точек границы l, принадлежащую границе множества $\bigcap_{i=1}^{m} H(O_i; R_i)$. Теорема доказана.

Пусть $P_1(0), P_2(0), \ldots, P_m(0)$ и $E(0)$ — начальные положения участников наряда $P_1, P_2, \ldots, P_m$ и E. Проведем перпендикуляр $(A_i; B_i)$ через середину A_i отрезка $[P_i(0), E(0)]$. Обозначим L_i полуплоскость с границей (A_i, B_i), содержащую точку $E(0)$. Пусть $K = \bigcap_{i=1}^{m} L_i$.

Имеет место следующая

Теорема 16. *Пусть* $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = \sigma$ *и* S — *полуплоскость с границей* l. *Тогда в игре* $G(m, 1; S)$ *возможно выживание в том и только в том случае, когда множество* K *имеет непустое пересечение с границей* l *множества* S.

Ф. Л. Черноусько получил следующий результат.

Теорема 17. *Пусть* $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \ldots \leqslant \rho_m < \sigma$, S — *выпуклое множество, не лежащее на одной прямой, и* $|P_i(0)E(0)| > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; *тогда в игре* $G(m, 1; S)$ *возможно выживание игрока* E *из начальных положений* $P_1(0), P_2(0), \ldots, P_m(0)$ *участников наряда* $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ *и* $E(0)$ *игрока* E.

Упражнения

42. Пусть $\rho_1 \geqslant \rho_2 > \sigma > 0$ и S — произвольное выпуклое множество на плоскости. Покажите, что в игре $G(2, 1; S)$ невозможно выживание тогда и только тогда, когда пересечение кругов Аполлония $H(O_1; R_1) \cap H(O_2; R_2)$ относительно начальных положений $P_1(0)$, $E(0)$ и $P_2(0)$, $E(0)$ не пересекается с границей l множества S.

43. Рассмотрим игру $G(2, 1; S)$, $\rho_1 \geqslant \rho_2 > \sigma$, при дополнительном предположении, что участники P_1 и P_2 наряда P в процессе движения могут пересекать границу l множества S. Выведите необходимое и достаточное усло-

вие невыживания игрока E в S в случае, когда S — произвольное (не обязательно выпуклое) множество на плоскости.

44. Докажите теорему 16 в случае $m = 2$, а теорему 17 в случае $m = 3$.

45. Сформулируйте и решите упражнения 42, 43 для игры $G(m, 1; S)$.

46. Пусть $\rho_1 \geqslant \rho_2 > \sigma > 0$. Постройте множество $УЗ_{P_1(0), P_2(0)}(S, w)$ в игре $G(2, 1; S)$ в случае, когда S — полуплоскость.

ГЛАВА IV

ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ, ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ НЕИЗВЕСТНО

§ 10. Преследование в угле *)

Предположим, что преследование происходит в угле α с вершиной в точке O и наряд P состоит из одного преследователя P. Обозначим игру преследования в угле символом $\Gamma(1, 1; \alpha)$, а величину угла α в радианах символом $\widehat{\alpha}$.

а) Пусть $\widehat{\alpha} = \pi/2$, в начале игры E находится в вершине угла α, P — на биссектрисе и $\rho = \sqrt{2}\sigma$ (рис. 34). Не ограничивая общности, предположим, что

$$\alpha = \{(x, y):\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0\}$$

и $P(0) = (b, -b)$, $b > 0$.

Теорема 18. *Пусть* $\widehat{\alpha} = \pi/2$, $\rho = \sqrt{2}\sigma$ *и в начале игры* P *и* E *находятся в положениях* $E(0) = (0, 0)$ *и* $P(0) = (b, -b)$, $b > 0$. *Тогда в игре* $\Gamma(1, 1; \alpha)$ *оптимальное время преследования* $\theta = |E(0)P(0)|/\rho = b/\sigma$.

Доказательство. Пусть игрок E на промежутке времени $[0, b/2\sigma]$ перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), A)}$, где $A = (b/2, 0)$, и, далее, на промежутке времени $[b/2\sigma, b/\sigma]$ — по полупрямой $\overrightarrow{[A, E(0))}$. Тогда очевидно, что E в момент времени $\theta = b/\sigma$ окажется в точке $O = (0, 0)$, и легко можно убедиться, что при таком способе перемещения игрока E на промежутке времени $[0, b/\sigma)$ игрок P не может осуществить встречу с E до момента времени $\theta = b/\sigma$.

---

*) В литературе по теории преследования игру $\Gamma(1, 1; \alpha)$ называют игрой «крыса, загнанная в угол».

Пусть теперь игрок E перемещается в угле α по произвольной ломаной траектории. Предпишем игроку P следующую стратегию: перемещаться по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), E(0)]}$, т. е. с постоянной вектор-скоростью $\mathbf{u} = (-\rho, \rho)$, до момента времени t_1, когда впервые игрок E

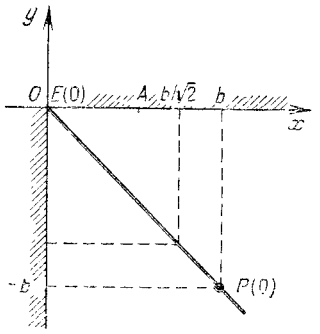


Рис. 34

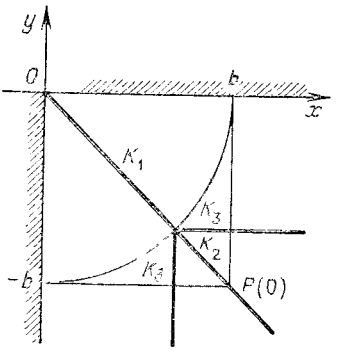


Рис. 35

попадает на один из отрезков $[(P_1(t), P_2(t)), (P_1(t), 0)]$ или $[(P_1(t), P_2(t)), (0, P_2(t))]$, т. е.

$$E(t_1) \in [(P_1(t_1), P_2(t_1)), (P_1(t_1), 0)] \cup$$
$$\cup [(P_1(t_1), P_2(t_1)), (0, P_2(t_1))],$$

и, начиная с момента времени $t = t_1$, использовать П-стратегию.

Возможны два случая: $t_1 = b/\sigma$ или $0 < t_1 < b/\sigma$. В первом случае встреча P с E осуществляется в момент времени $t_1 = 0$ в точке $O = (0, 0)$.

Пусть $0 < t_1 < b/\sigma$ и $E(t_1) \in [(P_1(t_1), P_2(t_1)), (P_1(t_1), 0)]$, где $P(t_1) = (b - t_1\rho, b + t_1\rho)$. Тогда из начальных положений $P(t_1)$ и $E(t_1)$ решение игры $\Gamma(1, 1; \alpha)$ сводится к решению игры преследования в полуплоскости $\Gamma(1, 1; L)$, где $L = \{(x, y: y \leqslant 0\}$ и полупрямая $[P(t_1), E(t_1)]$ перпендикулярна к границе полуплоскости L. Время встречи из начальных положений $P(t_1)$ и $E(t_1)$ будет наибольшим, если $E(t_1) = (b - t_1\sigma, 0)$ (см. упражнение 22).

Из теоремы 3 получаем, что в игре $\Gamma(1, 1; L)$ из начальных положений $P(t_1) = (b - t_1\rho, -b + t_1\rho)$ и $E(t_2) = (b - t_1\sigma, 0)$ можно завершить преследование за время, не превосходящее $(b/\sigma - t_1)$. Следовательно, в игре

$\Gamma(1, 1; \alpha)$ из начальных положений $P(0)=(b, -b)$ и $E(0)=(0, 0)$ можно завершить преследование за время, не превосходящее $(b/\sigma - t_1)+t_1 = b/\sigma = \theta$. Теорема доказана.

б) Пусть $\widehat{\alpha} = \pi/2$, игрок P в начале игры находится на биссектрисе угла α, т. е. в точке $P(0)=(b, -b)$, $b>0$, и $\rho = \sqrt{2}\sigma$ (рис. 35). Введем обозначения

$$K_1 = \alpha \cap H(E(0); b),$$

$$K_2 = \left\{(x, y):\ x \geqslant \frac{b}{\sqrt{2}},\ \ y \leqslant -\frac{b}{\sqrt{2}}\right\},$$

$$K_3 = \alpha \setminus (K_1 \cup K_2).$$

Теорема 19. *Пусть* $\rho = \sqrt{2}\sigma$ *и игрок* P *в начале игры находится в положении* $P(0)=(b, -b)$, $b>0$. *Тогда*

1) *если* $E(0) \in K_2$, *то решение игры* $\Gamma(1, 1; \alpha)$ *из начальных положений* $P(0)$ *и* $E(0)$ *сводится к решению игры* $\Gamma(1, 1)$;

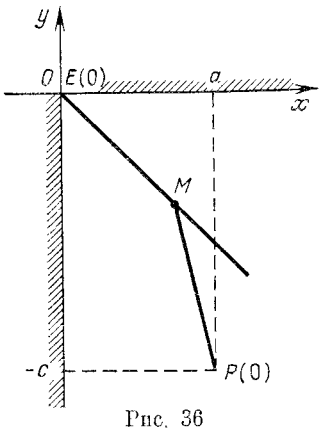


Рис. 36

2) *если* $E(0) \in K_3$, *то решение игры* $\Gamma(1, 1; \alpha)$ *из начальных положений* $P(0)$ *и* $E(0)$ *сводится к решению игры* $\Gamma(1, 1; L)$;

3) *если* $E(0) \in K_1$, *то в игре* $\Gamma(1, 1; \alpha)$ *оптимальное время преследования относительно начальных положений* $P(0)$ *и* $E(0)$ $\theta = b/\sigma$.

Доказательства утверждений 1) и 2) могут быть получены проведением элементарных вычислений, а доказательство утверждения 3) вполне аналогично доказательству теоремы 18.

в) Пусть $\widehat{\alpha} = \pi/2$, $\rho = \sqrt{2}\sigma$ и в начале игры P и E находятся в положениях $P(0)=(a, -c)$, $a>0$, $c>0$, и $E(0)=(0, 0)$ (рис. 36). Через M обозначим такую точку на биссектрисе угла α, что

$$|P(0)M| = |MO|.$$

Справедлива следующая

Теорема 20. *Пусть* $\widehat{\alpha} = \pi/2$, $\rho = \sqrt{2}\sigma$ *и в начале игры* P *и* E *находятся в положениях* $P(0)=(a, -c)$, $a>0$,

$c > 0$, *и* $E(0) = (0, 0)$. *Тогда в игре* $\Gamma(1, 1; \alpha)$ *оптимальное время преследования относительно начальных положений* $P(0)$ *и* $E(0)$

$$\theta = \frac{2|P(0)M|}{\rho}.$$

Упражнения

47. Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; \alpha)$, где $\widehat{\alpha} = \pi/2$, $\rho = \sqrt{2}\sigma$ и в начале игры P и E находятся в положениях $P(0) = (b, -b)$, $b > 0$, и $E(0) = (0, 0)$. Пусть игрок E на промежутке времени $[0, b/2\sigma]$ перемещается по полупрямой $\overrightarrow{[E(0)\ A]}$, где $A = (b/2, 0)$, и, далее, на промежутке времени $[b/2\sigma, b/\sigma]$ — по полупрямой $\overrightarrow{[A, E(0))}$. Докажите, что игрок P не может осуществить встречу с E до момента времени $\theta = b/\sigma$.

48. Найдите решение игры $\Gamma(1, 1; \alpha)$ в следующих случаях:

1) $\widehat{\alpha} = \pi/2$, $\rho > \sqrt{2}\sigma$ и в начале игры E находится в вершине, а P — на биссектрисе угла α, $|P(0)E(0)| > 0$;

2) $0 < \widehat{\alpha} < \pi/2$, $\rho \cos(\widehat{\alpha}/2) \geqslant \sigma$ и в начале игры P находится на биссектрисе угла α, $E(0) \in \alpha$, $|P(0)E(0)| > 0$;

3) $0 < \widehat{\alpha} < \pi/2$, $\rho \cos(\widehat{\alpha}/2) \leqslant \sigma$ и в начале игры E находится в вершине угла α, $P(0) \in \alpha$, $|P(0)E(0)| > 0$.

49. Найдите решение игры $\Gamma(1, 1; S)$ в случае, когда S — квадрат с вершинами в точках $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $P(0) = (0, 0)$, $E(0) \in S$ и $\rho = \sqrt{2}\sigma$.

50. Найдите решение игры $\Gamma(1, 1; S)$, где S — равносторонний треугольник, в следующих случаях:

1. $\rho = 2\sigma/\sqrt{3}$, в начале игры P находится в точке пересечения биссектрис треугольника S, $E(0) \in S$, $|P(0)E(0)| > 0$;

2. $\rho \geqslant 2$, $P(0) \in S$, $E(0) \in S$, $|P(0)E(0)| \geq 0$.

51. Докажите, что в игре $\Gamma(1, 1; \alpha)$, $0 < \widehat{\alpha} \leqslant \pi$, при условии $\rho \leqslant \sigma$ возможно убегание.

§ 11. Случай, когда убегающий «окружен» преследователями

В этом параграфе исследуем игру $\Gamma(m, 1)$ в случае, когда для начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ и $E(0)$ выполнено условие (см. (80)) $E(0) \in K \backslash K_0$, где

K — наименьший выпуклый многоугольник, содержащий точки $P_1(0), P_2(0), \ldots, P_m(0)$, а K_0 — граница многоугольника K.

1. *Игра* $\Gamma(3, 1)$. а) Рассмотрим случай $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 2\sigma$ и в начале игры P_1, P_2, P_3 находятся в вершинах равностороннего треугольника K со стороной $a > 0$,

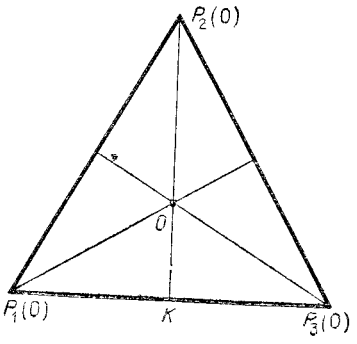


Рис. 37

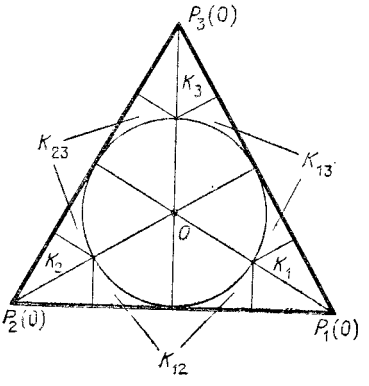


Рис. 38

$|P_1(0)P_2(0)| = |P_2(0)P_3(0)| = |P_1(0)P_3(0)| = a$ (рис. 37). Обозначим буквой O точку пересечения биссектрис треугольника K.

Теорема 21. *Пусть* $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 2\sigma$. *Тогда* (рис. 38)

1) *если* $E(0) \in K_1 \cup K_2 \cup K_3$, *то решение игры* Γ (3, 1) *сводится к решению игры* $\Gamma(1, 1)$;

2) *если* $E(0) \in K_{12} \cup K_{23} \cup K_{13}$, *то решение игры* $\Gamma(3, 1)$ *сводится к решению игры* $\Gamma(2, 1)$;

3) *если* $E(0) \in H(O;\ a/2\sqrt{3}\sigma)$, *то в игре* $\Gamma(3, 1)$ *оптимальное время преследования из начальных положений* $P_1(0), P_2(0), P_3(0)$ *и* $E(0)$

$$\theta = \frac{a}{2\sqrt{3}\sigma}.$$

Доказательство. Ограничимся указанием оптимальных стратегий убегающего E и наряда P в случае $E(0) \in H(O;\ a/(2\sqrt{3}\sigma))$.

Пусть точка M такова, что $|E(0)M| + |MO| = a/(2\sqrt{3}\sigma)$. Оптимальная стратегия игрока E: перемещаться по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), M)}$ до момента времени

$|E(0)M|/\sigma$ и перемещаться по полупрямой $\overrightarrow{[M, O)}$ на отрезке времени $[|E(0)M|/\sigma,\ a/(2\sqrt{3}\sigma)]$.

Оптимальная стратегия наряда P: перемещаться участникам наряда P_1, P_2, P_3, начиная с момента времени $t=0$, по полупрямым $\overrightarrow{[P_1(0)E(0))}$, $\overrightarrow{[P_2(0)E(0))}$, $\overrightarrow{[P_3(0)E(0))}$ соответственно до момента времени $t=t_1$, когда впервые игрок E попадает на границу $K_0(t_1)$ треугольника $K(t_1)=\triangle P_1(t_1)P_2(t_1)P_3(t_1)$, т. е.

$$E(t_1)\in[P_1(t_1)P_2(t_2)]\cup[P_2(t_1)P_3(t_1)]\cup[P_1(t_1)P_3(t_1)],$$

а начиная с момента времени t_1 применять II-стратегию.

Доказательство лишь незначительно отличается от доказательства теорем 5, 18—20.

б) Рассмотрим случай $\rho_1\geqslant\rho_2\geqslant\rho_3\geqslant\sigma$ и в начале игры P_1, P_2, P_3 находятся в вершинах треугольника K,

$$K=\triangle P_1(0)P_2(0)P_3(0).$$

Определим точку $M=(x, y)$ следующими соотношениями:

$$\frac{|P_1(0)M|}{\rho_1}=\frac{|P_2(0)M|}{\rho_2}=\frac{|P_3(0)M|}{\rho_3}. \tag{91}$$

Лемма 16. *Пусть* $\rho_1\geqslant\rho_2\geqslant\rho_3>0$ *и точки* $P_1(0)$, $P_2(0)$, $P_3(0)$ *не лежат на одной прямой. Тогда система уравнений* (91) *относительно* M *имеет не более двух решений или вовсе не имеет решений.*

Доказательство. Перепишем систему (91) в виде

$$\frac{|P_1(0)M|}{\rho_1}=\frac{|P_2(0)M|}{\rho_2}, \tag{92}$$

$$\frac{|P_1(0)M|}{\rho_1}=\frac{|P_3(0)M|}{\rho_3}. \tag{93}$$

а) Пусть $\rho_1>\rho_2>\rho_3>0$. Множество точек $M=(x, y)$, удовлетворяющих уравнению (92), представляет собой окружность $S(O_1; R_1)$ (ср. (5)), а множество точек, удовлетворяющих уравнению (93), представляет собой окружность $S(O_2; R_2)$, причем $O_1\neq O_2$. Следовательно, множество $S(O_1; R_1)\cap S(O_2; R_2)$ состоит не более чем из двух точек.

б) Пусть $\rho_1=\rho_2>\rho_3>0$. Тогда множество точек $M=(x, y)$, удовлетворяющих уравнению (92), представляет собой прямую, проходящую через середину отрезка

$[P_1(0), P_2(0)]$, а множество точек M, удовлетворяющих уравнению (93), представляет собой окружность $S(O_3; R_3)$. Очевидно, что прямая пересекает окружность не более чем в двух точках.

в) Пусть $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$. В этом случае точка M единственная и совпадает с центром описанной окружности к треугольнику K.

Лемма доказана.

Множество решений системы (91) обладает следующими свойствами.

Лемма 17. *Пусть* $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \rho_3 > 0$ *и точки* $P_1(0)$, $P_2(0)$, $P_3(0)$ *не лежат на одной прямой. Тогда*

а) *в треугольнике* K *содержится не более одной точки, удовлетворяющей системе* (91);

б) *если две точки* M_1 *и* M_2 *удовлетворяют системе* (91) *и* $H(M_1; |P_1(0)M_1|/\rho_1) \subset K$, *то круг* $H(M_2; |P_1(0)M_2|/\rho_1)$ *не пересекается с внутренностью треугольника* K, *т. е. с множеством* $K \backslash K_0$, *где* K_0 — *граница треугольника* K.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 22. *Пусть* $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \rho_3 \geqslant \sigma$ *и для начальных положений* $P_1(0)$, $P_2(0)$, $P_3(0)$ *система* (91) *не имеет решения. Тогда решение игры* $\Gamma(3, 1)$ *из положений*

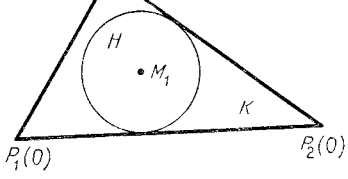


Рис. 39

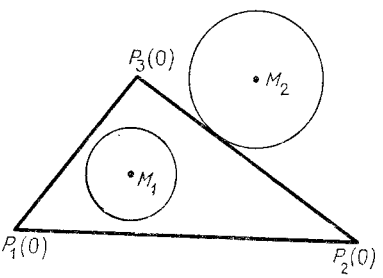


Рис. 40

$P_1(0)$, $P_2(0)$, $P_3(0)$ *и при любом начальном положении* $E(0)$ *сводится к решению игры* $\Gamma(2, 1)$.

Теорема 23. *Пусть* $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \rho_3 \geqslant \sigma$, *система* (91) *имеет единственное решение* M_1 *и*

$$H\left(M_1; \frac{|P_1(0)M_1|}{\rho_1}\right) \subset K$$

(*рис.* 39). *Тогда*

а) *если* $E(0) \in H(M_1; |P_1(0)M_1|/\rho_1)$, *то в игре* $\Gamma(3, 1)$ *оптимальное время преследования относительно началь-*

ных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$, $P_3(0)$ *и* $E(0)$ *равно* $\theta = |P_1(0)M_1|/\rho_1$;

б) *если* $E(0) \notin H(M_1; |P_1(0)M_1|/\rho_1)$, *то решение игры* $\Gamma(3, 1)$ *из начальных положений* $P_1(0)$, $P_2(0)$, $P_3(0)$ *и* $E(0)$ *сводится к решению игры* $\Gamma(2, 1)$.

Теорема 24. *Пусть* $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \rho_3 \geqslant \sigma$ *система* (91) *имеет два решения* M_1, M_2 *и*

$$H\left(M_1; \frac{|P_1(0)M_1|}{\rho_1}\right) \subset K,$$

а круг $H(M_2; |P_1(0)M_2|/\rho_2)$ *не пересекается с* $K \setminus K_0$ (рис. 40). *Тогда*

а) *если* $E(0) \in H(M_1; |P_1(0)M_1|/\rho_1)$, *то в игре* $\Gamma(3, 1)$ *оптимальное время преследования относительно начальных положений* $P_1(0)$, $P_2(0)$, $P_3(0)$ *и* $E(0)$

$$\theta = \frac{|P_1(0)M_1|}{\rho_1};$$

б) *если* $E(0) \notin H(M_1, P_1(0)M_1|/\rho_1)$, *то решение игры* $\Gamma(3, 1)$ *из начальных положений* $P_1(0)$, $P_2(0)$, $P_3(0)$ *и* $E(0)$ *сводится к решению игры* $\Gamma(2, 1)$.

Теорема 25. *Пусть* $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \rho_3 \geqslant \sigma$ *система* (91) *имеет два решения* M_1 *и* M_2 *и*

$$E(0) \notin H\left(M_1; \frac{|P_1(0)M_1|}{\rho_1}\right) \cup H\left(M_2; \frac{|P_1(0)M_2|}{\rho_2}\right)$$

(рис. 41). *Тогда решение игры* $\Gamma(3, 1)$ *сводится к решению игры* $\Gamma(2, 1)$.

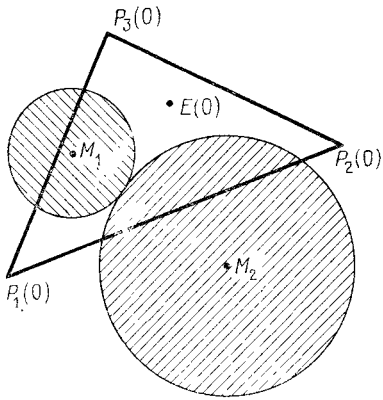


Рис. 41

Доказательство леммы 17 и теорем 22—25 предоставляется читателю.

2. *Игра* $\Gamma(m, 1)$. Следующая теорема доказана В. И. Пшеничным.

Теорема 26. *Пусть* $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = \sigma$ *и* $E(0) \in K \setminus K_0$ (ср. (80)). *Тогда в игре* $\Gamma(m, 1)$ *из начальных местоположений* $P_1(0)$, $P_2(0)$, ..., $P_m(0)$ *и* $E(0)$ *возможно завершение преследования за конечное время.*

52. Докажите лемму 17.

53. Пусть $\rho_i > 0$, $l_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, и точки A_1, A_2, A_3 не лежат на одной прямой. Докажите, что система уравнений

$$\frac{|A_1M| - l_1}{\rho_1} = \frac{|A_2M| - l_2}{\rho_2} = \frac{|A_3M| - l_3}{\rho_3}$$

относительно M имеет не более двух решений или не имеет решений вовсе.

54. Докажите теоремы 21—25.

55. Докажите теорему 26 в случае $m = 3$, $K = \triangle P_1(0)P_2(0)P_3(0)$ — равносторонний треугольник со стороной a и $E(0)$ — точка пересечения биссектрис треугольника K.

56. Рассмотрим игру $\Gamma(3, 1)$ в случае $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \sigma$ и $E(0) \in K \backslash K_0$ (см. теорему 26). Пусть наряд $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ использует П-стратегию. Укажите для игрока E наибольшее гарантированное время убегания.

57. Рассмотрим игру $\Gamma(2, 1; L)$, где L — полуплоскость с границей l и $\rho_1 = \rho_2 = \sigma$. Из точек $P_1(0)$ и $P_2(0)$ опустим перпендикуляры к границе l и точки пересечения обозначим соответственно D_1 и D_2. Обозначим буквой K трапецию с вершинами в точках $P_1(0)$, $P_2(0)$, D_2, D_1. Пусть $E(0) \in K \backslash ([D_1P_1(0)] \cup [P_1(0)P_2(0)] \cup [P_2(0)D_2])$ и наряд $P = \{P_1, P_2\}$ использует П-стратегию. Тогда

а) докажите, что в игре $\Gamma(2, 1; L)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$ и $E(0)$ возможно завершение преследования;

б) укажите для игрока E наибольшее гарантированное время преследования.

58. Рассмотрим игру $\Gamma(2, 1; L)$, когда L — полуплоскость с границей l, $\rho_1 = \rho_2 = \sigma$ и $E(0) \in K \backslash ([D_1, P(0)] \cup [P_1(0), P_2(0)] \cup [P_2(0), D_2])$. Проведем серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам $[P_1(0), E(0)]$ и $[P_2(0), E(0)]$ соответственно, обозначим

$$C_1 = l_1 \cap l, \quad C_2 = l_2 \cap l, \quad C_3 = l_1 \cap l_2.$$

Пусть $|C_3C_1| \geqslant |C_2C_1|$. Тогда

а) докажите, что в игре $\Gamma(2, 1; L)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$ и $E(0)$ возможно завершение пре-

следования за время

$$\frac{|E(0)C_3|+|C_3C_1|}{\sigma};$$

б) если $P_2(0)\in[C_1, C_3]$, то в игре $\Gamma(2, 1; L)$ оптимальное время преследования относительно начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$ и $E(0)$ равно $|P_2(0)C_1|/\sigma$.

§ 12. Лев и человек *)

Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; S)$, где $S=H=H(O; R)$ — круг с центром в точке O и радиусом $R>0$.

Игроки P (лев) и E (человек) в начале игры находятся в положениях $P(0)$ и $E(0)$ в множестве $H(O; R)$ (круговой арене), $|P(0)E(0)|>0$, а в процессе игры не могут покинуть $H(O; R)$.

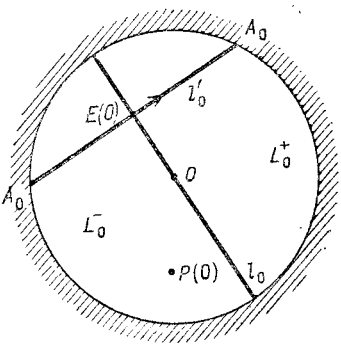


Рис. 42

Теорема 27**). *Пусть* $\rho=\sigma$. *Тогда в игре* $\Gamma(1, 1; H)$ *из любых начальных положений* $P(0)$ *и* $E(0)$, $|P(0)E(0)|>0$, *возможно убегание.*

Доказательство. Предположим, что $E(0)$ — внутренняя точка круга H (рис. 42), и укажем некоторый способ движения игрока E. Проведем прямую $l_0=(E(0), O)$; если $E(0)=0$, то l_0 — любая прямая, проходящая через точку $E(0)$. Прямая l_0 делит круг H на две равные части L_0^- и L_0^+. Пусть для определенности $P(0)\in L_0^-$. Через точку $E(0)$ проведем прямую $l_0'=(A_0^-, A_0^+)$, перпендикулярную прямой l_0, $A_0^-\in L_0^-$, $A_0^+\in L_0^+$, A_0^-, $A_0^+\in S(O, R)$. Обозначим

$$a=|E(0)A_0^+|, \quad b=|0, E(0)|. \tag{94}$$

Пусть игрок E в момент времени $t=t_i$, $i=0, 1, \ldots$, где $t_0=0$, находится в $E(t_i)$. Проведем прямую $l_i=(E(t_i), O)$, которая делит круг H на две равные части L_i^- и L_i^+, и

*) Задача «Лев и человек» и ее название предложены Р. Радо.

**) Теорема доказана А. С. Безиковичем.

пусть для определенности $P(t_i) \in L_i^-$. Через точку $E(t_i)$ проведем прямую $l_i' = (A_i^-, A_i^+)$, перпендикулярную прямой l_i, $A_i^- \in L_i^-$, $A_i^+ \in L_i^+$, A_i^-, $A_i^+ \in S(O; R)$.

Предпишем игроку E движение на промежутках времени $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$, по полупрямым $\overrightarrow{[E(t_i), A_i^+)}$, где

$$t_i = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \ldots + \frac{a}{i}\right) = \frac{a}{\sigma}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i}\right). \quad (95)$$

Покажем, что игрок P не может осуществить встречу с E на любом конечном промежутке времени $[0, \theta]$. Так как $\rho = \sigma$ и $P(t_i) \in L_i^-$, очевидно, что P не может осуществить встречу с E на любом промежутке времени $[t_i, t_{i+1}]$.

Докажем теперь, что при $i \to \infty$ последовательность моментов времени $t_i \to \infty$. Действительно, если $i = 2^k$, то из (95) имеем

$$t_i = \frac{a}{\sigma}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{2^k}\right) > \frac{a}{\sigma}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) = \frac{a}{\sigma} \cdot k \cdot \frac{1}{2} = \frac{ak}{2\sigma}. \quad (96)$$

Из (96) следует, что $t_i = t_{2^k} \to \infty$ при $k \to \infty$. Следовательно, для любого момента времени θ существует индекс i_0 такой, что $t_{i_0} \geqslant \theta$. Так как на отрезке времени $[0, t_{i_0}]$ возможно убегание, то тем более это возможно на отрезке времени $[0, \theta]$. Теперь покажем, что при таком движении игрок E не покидает круг H до момента времени θ. Легко убедиться, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots\}$

$$|OE(t_i)|^2 = b^2 + \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^2}{3^2} + \ldots + \frac{a^2}{(i+1)^2} =$$
$$= b^2 + a^2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(i+1)^2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant b^2 + a^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2} < b^2 + a^2 = R^2,$$

т. е. $E(t_i) \in H$, $i = 1, 2, \ldots$ (Здесь мы воспользовались

неравенством $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1$.) Из выпуклости круга H следует, что $E(t) \in H$ для всех $t \in [0, \theta]$.

Теорема доказана.

Следующая теорема доказана В. И. Левиным.

Теорема 28. *Пусть* $\rho = \sigma$. *В игре* $\Gamma(1, 1; H)$ *у игрока* P *существует способ преследования, гарантирующий сближение с* E *на любое наперед заданное расстояние* $\varepsilon > 0$ *из любых начальных положений* $P(0) \in H$ *и* $E(0) \in H$.

Упражнения

59. Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; S)$, где S — выпуклое множество, не лежащее на прямой, и $\rho = \sigma$. Тогда в игре из любых начальных положений $P(0)$ и $E(0)$, $|P(0)E(0)| > 0$, возможно убегание. Докажите это утверждение.

60. Докажите теорему 28.

61. Пусть $0 < \rho < \sigma$. Докажите, что в игре $\Gamma(1, 1; H)$ у игрока P существует способ преследования, гарантирующий сближение с E на расстояние $d = d(\rho, \sigma)$ из любых начальных положений $P(0) \in H$ и $E(0) \in H$.

62. Рассмотрим игру $\Gamma(2, 1; S)$, $\rho_1 = \rho_2 = \sigma$.

а) Докажите, что если S — квадрат со стороной a, то в игре $\Gamma(2, 1; S)$ из любых начальных положений $P(0)$ и $E(0)$ возможно завершение преследования за время $\theta = a/\sigma(3/2 + \sqrt{2}/2)$.

б) Докажите, если S — круг радиусом $a/2$, то в игре $\Gamma(2, 1; S)$ из любых начальных положений $P(0)$ и $E(0)$ возможно завершение преследования за время $\theta = a/\sigma(1 + \sqrt{2}/2)$.

63. Рассмотрим игру $\Gamma(2, 1; H)$, где $H(O; R)$ — круг, $\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{2}\sigma$ и в начале игры P_1 и P_2 находятся в $P_1(0) \in S(O; R)$ и $P_2(0) \in S(O; R)$ соответственно, $|P_1(0), P_2(0)| = 2R$. Найдите решение игры $\Gamma(2, 1; H)$ при любых начальных положениях $E(0) \in H$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

1. Перенести все результаты книги «Преследование на плоскости» на случай, когда преследование происходит в трехмерном пространстве.

2. Рассмотрим обобщение $\Gamma_l(m, 1; S)$ игры $\Gamma(m, 1; S)$. В игре $\Gamma_l(m, 1; S)$ под встречей наряда $P = \{P_1, \ldots, P_m\}$ с игроком E мы будем понимать сближение хотя бы одного из участников наряда P_i с игроком E на расстояние $l_i \geqslant 0$. В остальном игра $\Gamma_l(m, 1; S)$ совпадает с игрой $\Gamma(m, 1; S)$ (если все l_i, $i = 1, \ldots, m$, равны 0, то мы получаем игру $\Gamma(m, 1; S)$). Найти решение игры $\Gamma_l(m, 1; S)$.

3. Рассмотрим обобщение $G_l(m, 1; S)$ игры $G(m, 1; S)$. В игре $G_l(m, 1; S)$ под встречей наряда P с игроком E мы будем понимать сближение хотя бы одного из участников наряда P_i с игроком E на расстояние l_i. В остальном игра $G_l(m, 1; S)$ совпадает с игрой $G(m, 1; S)$. Найти решение игры $G_l(m, 1; S)$.

4. Рассмотрим игру $\Gamma(1, 1; \alpha)$, где $0 < \widehat{\alpha} \leqslant \pi/2$, $\rho > \sigma > 0$, и местоположение игрока E в начале игры совпадает с вершиной угла α, $P(0) \in \alpha$, $|P(0)E(0)| > 0$. Найти решение игры $\Gamma(1, 1; \alpha)$.

5. Найти решение игры $\Gamma(1, 1; \alpha)$ в общем случае.

6. Найти решение игры $\Gamma(3, 1)$ в случаях $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \rho_3 > \sigma$; $\rho_1 \geqslant \rho_2 > \rho_3 = \sigma$; $\rho_1 > \rho_2 = \rho_3 = \sigma$.

7. Найти решение игры $\Gamma(3, 1)$ при условии $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \sigma$ и $E(0)$ находится внутри треугольника $P_1(0)P_2(0)P_3(0)$. Интересен также частный случай, когда $\triangle P_1(0)P_2(0)P_3(0)$ равносторонний и точка $E(0)$ совпадает с точкой пересечения его биссектрис.

8. Найти решение игры $\Gamma(2, 1; L)$ в случае, когда $\rho_1 \geqslant \rho_2 > \sigma$ и L — полуплоскость.

9. Исследовать задачу 8 при условии $\rho_1 = \rho_2 = \sigma$.

10. Исследовать задачи 5, 8 в случае, когда множество S является квадратом.

11. Найти решение игры $\Gamma(1, 1; S)$, где S — круг и $\rho > \sigma$.

12. Найти решение игры $\Gamma(2, 1, S)$ в случаях $\rho_1 \geqslant \rho_2 > \sigma$; $\rho_1 = \rho_2 = \sigma$, когда S — круг.

РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ

1. а) Из формулы (1) следует, что $P(t) = (2t, 0)$ и $E(t) = (1 + t, 0)$; б) встреча P с E происходит в точке $M = (2, 0)$ в момент времени $t = 1$.

2. а) Если E перемещается с вектор-скоростью $\mathbf{v} = (1, 0)$, то игрок P не может осуществить встречу с E до момента времени $\theta = 1$, так как при $0 \leqslant t < 1$ для положений $P_1(t) = (P_1(t), 0)$ и $E(t) = (E_2(t), 0) = (1 + t, 0)$ (см. упражнение 1) имеем $P_1(t) \leqslant 2t < 1 + t = E_1(t)$. С другой стороны, если игрок P перемещается с вектор-скоростью $\mathbf{u} = (2, 0)$, то встреча P с E происходит не позже, чем за время $\theta = 1$, так как в момент времени $0 = 1$ для положений $P(t) = (2t, 0)$ и $E(t) = (E_1(t), 0)$ имеем $E_1(1) \leqslant 2 = P_1(t)$.

б) Если $a > b$, то оптимальное время преследования равно $a - b$ $\mathbf{u} = (2, 0)$ и $\mathbf{v} = (1, 0)$ — оптимальные стратегии игроков P и E соответственно.

Если $a < b$, то оптимальное время преследования равно $b - a$; $\mathbf{u} = (-2, 0)$ и $\mathbf{v} = (-1, 0)$ — оптимальные стратегии игроков P и E соответственно.

3. а) Для начального положения $E(0) = (a, 0)$ игрока E возможно выживание, если $a \in [-2, 1] \cup [1, 2]$, в противном случае выживание невозможно.

б) Пусть $a > b$, тогда из начального положения $E(0) = (a, 0)$ возможно выживание, если $a \in [-2, (b - 2)/2] \cup [(2 - b)/2, 2]$, в противном случае выживание невозможно.

4. К моменту времени $t > 0$ игрок P из начального положения $P(0)$ может оказаться в любой точке круга $H(P(0); \rho t)$ (лемма 1), но поскольку в процессе движения игрок P не может покинуть множество S, то множество всех точек, в которых может оказаться игрок P в момент времени t, имеет вид $S \cap H(P(0); \rho t)$.

5. Точки $P(0)$, $P(t_1)$ и M лежат на одном радиусе $[P(0), M]$ и $|P(0)P(t_1)| = \rho t_1$, $|P(t_1)M| = \rho(t - t_1)$, следовательно, окружности $S(P(0); \rho t)$ и $S(P(t_2); \rho(t - t_1))$ касаются в точке M (см. лемму 6).

6. См. доказательство леммы 3.

7. Геометрическое место таких точек A образует эллипс с фокусами в точках $P(0)$ и z.

8. Геометрическое место точек Аполлония образует отрезок $[A(P(0), E(0)), M]$. Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 4.

9. При $t = 0$ или $t = |E(0)M|/\sigma$ неравенство очевидно. Рассмотрим случай $0 < t < |E(0)M|/\sigma$.

Из подобия треугольников $E(0)P(0)M$ и $E(t)P(t)M$ (см. рис. 7) имеем

$$\frac{|E(t)P(t)|}{|P(0)E(0)|} = \frac{|E(t)M|}{|E(0)M|} = \frac{|E(0)M| - |E(0)E(t)|}{|E(0)M|},$$

отсюда, учитывая, что $P(0)E(0) = b$, $|E(0)E(t)| = \sigma t$, получаем

$$|E(t)P(t)| = b - \frac{\sigma b t}{|E(0)M|}.$$

Отсюда и из формулы (12) имеем

$$|E(t)A(t)| = \frac{\sigma|P(t)E(t)|}{\rho - \sigma} = \frac{\sigma}{\rho - \sigma}\left(b - \frac{\sigma b t}{|E(0)M|}\right).$$

Следовательно, данное неравенство можно переписать в виде

$$\sigma t + \frac{\sigma}{\rho - \sigma}\left(b - \frac{\sigma b t}{|E(0)M|}\right) \leqslant \frac{\sigma b}{\rho - \sigma}.$$

Отсюда, учитывая, что $t > 0$, получаем эквивалентное неравенство

$$\sigma t \leqslant \frac{\sigma^2 b t}{(\rho - \sigma)|E(0)M|},$$

т. е.

$$|E(0)M| \leqslant \frac{\sigma b}{\rho - \sigma} = |E(0)A|.$$

Последнее неравенство всегда справедливо, поскольку A — точка Аполлония.

10. Предоставляется читателю.

11. Предоставляется читателю.

12. Предположим, что $E(0) = (0, a)$, $P(0) = (0, 0)$ и игрок перемещается с вектор скоростью $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. II-стратегия предписывает игроку P движение с вектор-скоростью $\mathbf{u} = \left(v_1, \sqrt{\rho^2 - v_1^2}\right)$. Из неравенства $\sqrt{\rho^2 - v_1^2} \geqslant \sqrt{\rho^2 - \sigma^2} > 0$ следует, что N — точка с положительной ординатой. Отсюда получаем решение задачи.

13. Предоставляется читателю.

14. Предоставляется читателю.

15. Убегающему достаточно перемещаться по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), E(0))}$. Тогда $|P(t)E(t)| \geqslant |P(0)E(0)|$ для всех $t \geqslant 0$.

16. а) Для всех $t \geqslant \frac{|E(0)E(t)|}{\rho - \sigma}$ имеет место включение из утверждения в) леммы 6.

17. Укажем способ преследования игрока E. Пусть в момент времени $t = \bar{t}$ игрок E решил изменить направление своего движения и начал перемещаться по полупрямой $\overrightarrow{[E(0), M)}$, где $\overline{M}$ — некоторая точка на окружности Аполлония $S(\bar{O}; \bar{R})$, соответствующая положениям $P(\bar{t})$ и $E(\bar{t})$. Если $\overline{M} \in S$, то преследователь игроку P, начиная с момента времени $t = \bar{t}$, движение по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), M)}$, т. е. согласно II стратегии, если $\overline{M} \notin S$, то преследователь

игроку, начиная с момента времени $t = \bar{t}$, движение по полупрямой $\overrightarrow{[P(0), M)}$, где $M = S \cap [E(0), \bar{M})$. Для доказательства утверждения удобно ввести псевдопреследователя P_Φ, действующего согласно П-стратегии.

18. В обоих случаях точка Аполлония, соответствующая начальным положениям $P(0)$ и $E(0)$, содержится в полуплоскости L.

19. Предоставляется читателю.

20. В данном случае точка встречи M является внутренней точкой полуплоскости L и множество, ограниченное параболой $\mathscr{L}_0$ и отрезком $[-M^*, M^*]$, выпукло.

21. Предоставляется читателю.

22. Предположим, что $P(0) = (0, -b)$ и $E = (0, -a)$. Из теоремы 3 следует, что $\theta = \sqrt{(b^2 - a^2)/(\rho^2 - \sigma^2)}$. Если величину θ рассматривать как функцию переменной a, т. е. $\theta = \theta(a)$, то очевидно, что функция $\theta = \theta(a)$ достигает своего наибольшего значения, когда $a = 0$, т. е. в случае $E(0) \in l$.

23. Предоставляется читателю.

24. Предоставляется читателю.

25. а) Рассмотрим случай $\rho_1 > \rho_2 > \sigma = 1$. Предположим, что $P_1(0) = (0, 0)$ и $P_2(0) = (a, 0)$, $a > 0$. Решение игры $\Gamma(2, 1)$ из начальных положений $P_1(0)$, $P_2(0)$ и $E(0)$ сводится к решению игры $\Gamma(1, 1)$ тогда и только тогда, когда

$$E(0) \in H(O_1; R_1) \cup S(O_2; R_2) \cup (S \setminus H(O_2; R_2)),$$

где S — вся плоскость, $O_1 = \left(-\dfrac{\rho_1 (\rho_1 - 1)\, a}{\rho_2^2 - \rho_1^2},\ 0 \right)$,

$$R_1 = \frac{(\rho_1 - 1)\, \rho_2 a}{\rho_2^2 - \rho_1^2},\quad O_2 = \left(-\frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)\, a}{\rho_2^2 - \rho_1^2},\ 0 \right),\quad R_2 = \frac{\rho_1 (\rho_1 - 1)\, a}{\rho_2^2 - \rho_1^2}.$$

Докажите это утверждение. Найдите аналогичные условия и в случаях а) $\rho_1 = \rho_2 > \sigma$; б) $\rho_1 > \rho_2 = \sigma$.

26. Следует из решения упражнения 25 и теорем 5—6.

27. Предоставляется читателю.

28. Предоставляется читателю.

29. Предоставляется читателю.

30. Предоставляется читателю.

31. См. указание к упражнению 23.

32. Утверждение следует из свойств П-стратегии, которая предписывает игроку P движение по отрезку $[P(t_k), P(t_{k+1})]$ в случае, когда игрок E двигается по отрезку $[E(t_k), E(t_{k+1})]$.

33. Согласно теореме 2 множество точек встречи при использовании И-стратегии игроком P в игре $G(1, 1; S)$ совпадает с кругом Аполлония $H(O_1; R_1)$. Поэтому если $H(O_1; R_1)$ не пересекается с границей l множества S, игрок E не может достичь l до его встречи с игроком P. Принадлежность траектории игрока P множеству S обеспечивается выпуклостью S.

34. Если не требовать условия принадлежности траектории игрока P множеству S, то условие выпуклости S не нужно для доказательства оптимальности И-стратегии в игре $G(1, 1; S)$. Поэтому решение совпадает с решением предыдущего упражнения.

35. Поскольку множество S ограничено, то полупрямая $[P(0), E(0))$ обязательно пересекает границу l этого множества.

Стратегия E, обеспечивающая выживание, заключается в движении игрока E по полупрямой $[P(0), E(0))$.

36. Обозначим буквой M точку окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$ относительно начальных положений $P(0)$, $E(0)$, наиболее близкую к границе l множества S. Оптимальная стратегия игрока E заключается в движении по полупрямой $[E(0), M]$, а оптимальная стратегия игрока P — П-стратегия.

37. Предоставляется читателю.

38. Предоставляется читателю.

39. Пусть S — квадрат. Представьте квадрат как пересечение полуплоскостей L_1, L_2, L_3, L_4. Постройте $УЗ_{P(0)}(L_i; \omega)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Множество $УЗ_{P(0)}(S; \omega)$ совпадает с пересечением квадрата S с объединением множеств $\bigcup_{i=1}^{4} УЗ_{P(0)}(L_i; \omega)$. Аналогично представьте $УЗ_{P(0)}(S; \omega)$ для многоугольника. Случай круга может быть получен предельным переходом. Построение $УЗ_{E(0)}(S; \omega)$ предоставляется читателю.

40. Пусть $\{P(0), E(0)\} \in УЗ(S; \omega)$. Если в игре $G(1, 1; S)$ относительно начальных положений $P(0)$, $E(0)$ возможно выживание, то это означает, что круг Аполлония $S(O_1; R_1)$ пересекается в некоторой точке M с границей l множества S. Рассмотрим движение E по полупрямой $[E(0), M)$. Пусть $P(t)$ — произвольное движение P. Предположим, что в некоторый момент $\bar{t} > 0$ пара $\{P(\bar{t}), E(\bar{t})\}$ не принадлежит $УЗ(S; \omega)$. Тогда это означает, что круг Аполлония относительно начальных положений $P(\bar{t})$ и $E(\bar{t})$ не будет пересекаться с l, т. е. из начальных состояний $P(\bar{t})$, $E(\bar{t})$ возможна встреча с E при движении E по полупрямой $[E(0)M)$ до достижения игроком E точки M. Однако это противоречит лемме 5 (так как E находится на окружности Аполлония $S(O_1; R_1)$). Полученное противоречие доказывает утверждение.

41. Доказательство аналогично упражнению 40.

42. Доказательство аналогично упражнению 33.

43. Доказательство аналогично упражнению 34.

44. Предоставляется читателю.

45. Предоставляется читателю.

46. Предоставляется читателю.

47. Воспользуйтесь леммой 5.

48. См. доказательство теорем 18—20.

49. Если $E(0) \in S \cap [H((1, 1); 1) \cup H((1, -1); 1) \cup H((-1, -1); 1) \cup H((-1, 1); 1)]$, то в игре $\Gamma(1, 1; S)$ оптимальное время преследования равно 1. В остальном решение игры $\Gamma(1, 1; S)$ либо сводится к решению игры $\Gamma(1, 1; L)$, где L — полуплоскость, либо к решению игры $\Gamma(1, 1)$.

50. См. теоремы 18, 19 и указание к упражнению 49.

51. Следует из теоремы 26.

52. Предоставляется читателю.

53. Предоставляется читателю.

54. Предоставляется читателю.

55. Используя П-стратегию, получаем, что наряд $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ гарантирует встречу за время $\theta = a/\sigma$ (см. упражнение 56).

56. В этом случае множество K (см. теорему 26) является треугольником. Пусть точки A_1, A_2, A_3 — его вершины и $|A_1A_2| \geqslant |A_2A_3| \geqslant |A_1A_3|$. Через точку $E(0)$ проведем прямую, параллель-

ную отрезку $[A_1A_2]$, и пусть B_1 и B_2 — точки пересечения этой прямой с отрезками $[A_1A_3]$ и $[A_2A_3]$ соответственно. Гарантийное время убегания игрока E при использовании нарядом P П стратегии равно $\theta = (|B_1B_2| + |B_2A_2|)/\sigma$.

57. Воспользуйтесь указанием к упражнению 55.

58. Предоставляется читателю.

59. Следует из теоремы 26.

60. Предоставляется читателю.

61. Предоставляется читателю.

62. а) Укажем стратегию наряда $P = \{P_1, P_2\}$. Сначала наряд $P = \{P_1, P_2\}$ за минимальное время переходит в центр квадрата, а далее использует П-стратегию.

б) Такую же стратегию применяет наряд P и в этом случае.

63. Предположим, что $P_1(0) = (-R, 0)$ и $P_2(0) = (R, 0)$. Если $E(0) \in [H((0, R); R) \cup H((0, -R); R)] \cap H(0; R)$, то оптимальное время преследования относительно положений $P_1(0)$, $P_2(0)$ и $E(0)$ равно $\theta = R/\sigma$; в остальном решение игры $\Gamma(2, 1; H)$ сводится либо к решению игры $\Gamma(1, 1; \alpha)$, где α — угол, либо к решению игр $\Gamma(2, 1)$ и $\Gamma(1, 1)$.

НЕКОТОРЫЕ СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В КНИГЕ

Будем считать, что на плоскости введена ортогональная система координат XOY. Тогда $A = (A_1, A_2)$ будет означать точку на плоскости с абсциссой A_1 и ординатой A_2;

$\mathbf{A}$ — вектор с началом в точке $O = (0, 0)$ и с концом в точке A;

$\overrightarrow{AB}$ — вектор с началом в точке A и концом в точке B;

$[A, B]$ — отрезок с концами в точках A и B;

(A, B) — прямая, проходящая через точки A и B;

$[A, B)$ — полупрямая (луч) с началом в точке A, проходящая через точку B;

$\overrightarrow{[A, B)}$ — полупрямая с направлением $\overrightarrow{AB}$, по которой возможно движение только в направлении $\overrightarrow{AB}$;

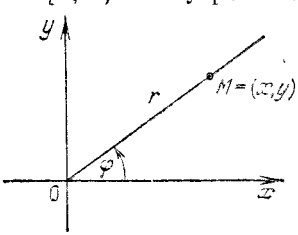


Рис. 43

$|AB|$ — расстояние между точками $A = (x_1, y_1)$ и $B = (x_2, y_2)$, т. е. $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$;

$|\overrightarrow{AB}|$ — длина вектора $\overrightarrow{AB}$, т. е. $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$;

$\triangle ABC$ — треугольник с вершинами в точках A, B, C;

$H(A; R)$ — круг с центром в точке A и радиусом R;

$S(A; R)$ — окружность с центром в точке A и радиусом R;

$X \cap Y$, $X \cup Y$ и $X \setminus Y$ — пересечение, объединение и разность множеств X и Y; $A \in X$ означает, что точка A принадлежит множеству X, $Y \subset X$ — множество X содержит множество Y; $\operatorname{conv} X$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее множество X; множество $X \setminus Y$ состоит из точек множества X, не принадлежащих множеству Y, ϕ — пустое множество;

$\parallel$ — знак параллельности; $\perp$ — знак перпендикулярности;

$\uparrow\uparrow$ — знак сонаправленности векторов.

Символом $E(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, обозначим траекторию (закон движения) игрока E на отрезке времени $[t_1, t_2]$.

Полярные координаты. Пусть $M = (x, y)$ — некоторая точка на плоскости. Проведем полупрямую $[0, M)$ и пусть $|0M| = r$ и $\varphi = \angle M0x$ (рис. 43). Легко заметить, что таким способом любой точке (x, y) на плоскости сопоставляется единственная пара (r, φ), которая называется *полярными координатами точки* $M = (x, y)$. Наоборот, каждой точке (r, φ) в полярных координатах соответствует единственная точка (x, y) на плоскости, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аполлония круг 16
— окружность 16
— точка 16

Время преследования гарантированное 11
— — оптимальное 11
Выживание возможно 13
— не возможно 12
Выпуклое множество 7

Игра преследования $\Gamma(m, 1; S)$ 11
— с линией жизни $G(m, 1; S)$ 12

Зона встречи 59
Зона убегания 59

Линейная скорость точки 7

Множество достижимости 14

Оптимальная стратегия 11, 12

Простое движение 6
— — по ломаным 7
П-стратегия 24

Теорема А. С. Безиковича 79
— В. И. Левина 81
— Б. Н. Пшеничного 77
— Ф. Л. Черноусько 68
Траектория движения 6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава I

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Простое движение. Постановка задачи преследования 6
Упражнения 1—3 13
§ 2. Множество достижимости, окружность и точка Аполлония 14
Упражнения 4—9 21
§ 3. Стратегия параллельного сближения 23
Упражнения 10—14 27

Глава II

ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 4. Преследование на плоскости с одним преследователем 29
Упражнения 15—17 33
§ 5. Преследование в полуплоскости с одним преследователем 34
Упражнения 18—24 46
§ 6. Преследование на плоскости с несколькими преследователями 47
Упражнения 25—30 52

Глава III

ИГРА С «ЛИНИЕЙ ЖИЗНИ»

§ 7. Преследование с одним преследователем 54
Упражнения 31—36 58
§ 8. Построение зон убегания и зон встречи 59
Упражнения 37—41 64
§ 9. Преследование с несколькими преследователями . . 65
Упражнения 42—46 68

Глава IV

ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ, ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ НЕИЗВЕСТНО

§ 10. Преследование в угле 70
Упражнения 47—51 73
§ 11. Случай, когда убегающий «окружен» преследователями 73
Упражнения 52—58 77
§ 12. Лев и человек 79
Упражнения 59—63 81
Задачи для исследования 82
Решения, указания, ответы 83
Некоторые символы и обозначения, используемые в книге 88
Предметный указатель 89

Научно-популярное издание

ПЕТРОСЯН Леон Аганесович
РИХСИЕВ Бадир Бердибаевич

ПРЕСЛЕДОВАНИЕ НА ПЛОСКОСТИ

Серия «Популярные лекции по математике», выпуск 61

Заведующий редакцией *А. П. Баева*
Редактор *В. В. Донченко*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *Е. Б. Морозова*
Корректоры *Т. Г. Егорова, Л. С. Сомова*

ИБ № 32769

Сдано в набор 08.09.90. Подписано к печати 27.05.91. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая. Усл. печ. л. 5,04. Усл. кр.-отт. 5,25. Уч.-изд. л. 5,35. Тираж 53 000 экз. Заказ № 425. Цена 80 коп.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»,
Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск 77, Станиславского, 25

PURSUIT ON THE PLANE

L. A. Petrosjan, B. B. Rikhsiev

The theory of differential games is a new developing branch of modern mathematics. Starting from the problems of pursuit and evasion it covers today various mathematical models of decision-making when different conflicting sides are presented. The book is devoted to the most elementary classes of differential games-simple motion pursuit games on the plane with complete information. In spite of the elementary and attractive formulations many of the problems discussed in the book could serve as a basis of further scientific research.

Chapter 1. Geometry of simple motino.

The motions of the players pursuier (P) and evader (E) are defined as movements with constant speeds along arbitrary broken lines with the finite number of vertexes. The simple motion pursuit game, the optimal capture time, optimal pursuit and evasion strategies are defined. The reachable sets of the players, the capture circle and the parallel pursuit strategy (Π-strategy) are introduced.

Chapter 2. Pursuit game on the plane.

The optimal strategies in the pursuit games on the plane and halfplane with one pursuier and one evader are found In the same way the case of two pursuiers is considered. It is proved that in all cases the Π-strategy of P is optimal one.

Chapter 3. «Lifeline» games.

The cases of one and m pursuiers are considered. The aim of the evader in this class of games is to reach the boundary (lifeline) of some given set S before being captured. It is proved that when P uses Π-strategy the capture set coincides with the Apollonius circle in the case of one pursuier and with the intersection of m such circles in the case of m pursuiers. The optimality of Π-strategy is proved and the complete solution founded.

Chapter 4. Pursuit games with the solutions yet unknown.

To this class of games belong the so called "dead-line" games. That means the pursuit-evasion games in which the both players move in the given set S having no possibility to penetrate its boundary (dead-line), or the evader surrounded by the pursuiers with the aim to minimize the time of capture. In some special cases the optimal strategies are formed.

The book is elementary written and is understandable for the secondary school students. The great number of exercises and research problems are included.

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. **И. А. Архангельский и Б. И. Зайцев.** Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. **А. Н. Костовский.** Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.

Вып. 31. **А. Г. Дорфман.** Оптика конических сечений.
Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.
Вып. 33. **А. С. Барсов.** Что такое линейное программирование.
Вып. 34. **Б. Е. Маргулис.** Системы линейных уравнений.
Вып. 35. **Н. Я. Виленкин.** Метод последовательных приближений.
Вып. 36. **В. Г. Болтянский.** Огибающая.
Вып. 37. **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние?
Вып. 39. **Н. П. Воробьев.** Признаки делимости.
Вып. 40. **С. В. Фомин.** Системы счисления.
Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. **Ю. И. Любич и Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. **В. А. Успенский.** Треугольник Паскаля.
Вып. 44. **И. Я. Бакельман.** Инверсия.
Вып. 45. **И. М. Яглом.** Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. **И. М. Соболь.** Метод Монте-Карло.
Вып. 47. **Л. А. Калужнин.** Основная теорема арифметики.
Вып. 48. **А. С. Солодовников.** Системы линейных неравенств.
Вып. 49. **Г. Е. Шилов.** Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. **Б. Г. Болтянский, Н. Ц. Гохберг.** Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. **И. М. Бескин.** Изображения пространственных фигур.
Вып. 52. **И. М. Бескин.** Деление отрезка в данном отношении.
Вып. 53. **Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева.** Стереографическая проекция.
Вып. 54. **В. А. Успенский.** Машина Поста.
Вып. 55. **Л. Беран.** Упорядоченные множества.
Вып. 56. **С. А. Абрамов.** Элементы программирования.
Вып. 57. **В. А. Успенский.** Теорема Гёделя о неполноте.
Вып. 58. **Ю. А. Шашкин.** Эйлерова характеристика.
Вып. 59. **Л. А. Скорняков.** Системы линейных уравнений.
Вып. 60. **Ю. А. Шашкин.** Неподвижные точки.
Вып. 61. **Л. А. Петросян, Б. Б. Рихсиев.** Преследование на плоскости.